УЧЕБНИК

МАТЕМАТИКА 9 ОДДЕЛЕНИЕ

СПОРЕД ПРОГРАМАТА ПО МАТЕМАТИКА ЗА 9 ОДДЕЛЕНИЕ
ВО ДЕВЕТГОДИШНОТО ОСНОВНО ОБРАЗОВАНИЕ

Сју Пембертон, Патрик Кивлин и Пол Винтерс

lamina

7 издание, 2024

Essential Mathematics for Cambridge Secondary 1 Stage 9 Pupil Book
Text © Sue Pemberton, Patrick Kivlin, and Paul Winters 2014
Illustrations © Oxford University Press 2014
This book was originally published in English in 2014.
This translation is published by arrangement with Oxford University Press.

Математика 9, учебник
Текст © Сју Пемберton, Патрик Кивлин и Пол Винтерс 2014
Оригинални илустрации © Оксфорд Универзити Прес, 2014
Книгата е препат објавена на англиски јазик во 2014 година.
Овој превод е издаден во договор со „Оксфорд Универзити Прес".

Автори
Сју Пемберton, Патрик Кивлин и Пол Винтерс
(Sue Pemberton, Patrick Kivlin, and Paul Winters)

Македонско адаптирано издание
Арс Ламина – публикации, Скопје 2024
Авторски права © Арс Ламина – публикации

Главен уредник
Бранка Бугариска

Уредник
Билјана Стојоска-Златков

Превод од англиски јазик
м-р Методија Јанчески

Јазична редакција
Ивана Кузманоска
Дејан Василевски

Стручна редакција
д-р Анета Гацовска-Барандоска, доцент на Институтот за математика
Природно-математички факултет, Универзитет „Св. Кирил и Методиј", Скопје
д-р Весна Димитриевска Ристовска, доцент на ФИНКИ
Универзитет „Св. Кирил и Методиј", Скопје
м-р Методија Јанчески, асистент на ФИНКИ
Универзитет „Св. Кирил и Методиј", Скопје
Весна Бојаџиева, професор по математика
ОУ „Кочо Рацин"-Скопје

Техничко уредување
Арс Ламина

Дизајн на корица
Дарко Фиданоски

Печати
Бранко Гапо – графичко производство, Скопје 2024

Тираж
2000

Сите права се задржани. Ниту еден дел од оваа книга не смее да биде препечатуван или пренесуван во каква било форма или со какви било средства, електронски или механички, вклучувајќи и фотокопирање, документирање или да биде зачуван во систем за повторно пронаоѓање без писмена согласност од издавачот.

Овој учебник е одобрен за употреба во деветгодишно основно образование, со Решение за продолжување на важноста на решението за употреба на учебник по предметот математика за 9 одделение број 08-9084/1 од 25.07.2018, Министерство за образование и наука на Р. Македонија

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

373.3.016:51(075.2)=163.3

ПЕМБЕРТОН, Сју
Математика : 9 одделение : според програмата по математика за 9 одделение во деветгодишното основно образование : учебник / Сју Пемберton, Патрик Кивлин и Пол Винтерс ; [превод од англиски јазик Методија Јанчески]. - 7. изд. - Скопје : Арс ламина - публикации, 2024. - IV, 307 стр. : илустр ; 27 см

Превод на делото: Essential mathematics for Cambridge secondary 1 stage 9 : pupil book / Sue Pemberton, Patrick Kivlin, and Paul Winters. - Речник: стр. 305-307

ISBN 978-608-280-011-0

1. Кивлин, Патрик [автор] 2. Винтерс, Пол [автор]

COBISS.MK-ID 64135941

Содржина

1 Број и решавање проблеми 1
1.1 Заокружување броеви 2
1.2 Степени 5
1.3 Целобројни степени на 10 11
1.4 Множење и делење со децимални броеви 13
1.5 Собирање и одземање дропки 16
1.6 Множење дропки 20
1.7 Делење дропки 23
1.8 Позитивни и негативни броеви 24
Задачи за повторување 28

2 Алгебра и решавање проблеми 30
2.1 Упростување степени 31
2.2 Правила за операции со степени со еднакви основи 32
2.3 Разложување на множители 34
2.4 Собирање и одземање алгебарски дропки 36
2.5 Решавање линеарни равенки 38
2.6 Составување алгебарски изрази 40
2.7 Инверзна функција 42
2.8 Правило за одредување следен член на низа 45
2.9 Правило за одредување *n*-ти член на низа 49
2.10 *n*-ти член на аритметичка низа 52
Задачи за повторување 55

3 Геометрија и решавање проблеми 58
3.1 Три димензии 58
3.2 Осна симетрија во три димензии 64
3.3 Тесалација 66
3.4 Опишување трансформации 70
3.5 Зголемување и сличност 75
Задачи за повторување 80

4 Мерење и решавање проблеми 84
4.1 Претворање мерни единици 84
4.2 Плоштина 87
4.3 Круг 91
Задачи за повторување 95

5 Работа со податоци и решавање проблеми 98
5.1 Планирање на истражување 98
5.2 Инструмент за собирање податоци 102
5.3 Стебло-лист дијаграми 107
5.4 Статистики за големи групи податоци 111
5.5 Споредување распределби 117
Задачи за повторување 122

6 Број и решавање проблеми 126
6.1 Квадратни и кубни корени 127
6.2 Редослед на операции 130
6.3 Зголемување и намалување со проценти 132
6.4 Споредување размер 138
6.5 Пропорционалност 144
Задачи за повторување 150

7 Алгебра и решавање проблеми 154
7.1 Изведување формули и заменување броеви во формули 155
7.2 Изразување променлива 159
7.3 Коефициент на правец на график на функција 166
7.4 График на линеарна функција 167
7.5 Функции што произлегуваат од ситуации во реалниот живот 170
7.6 Права пропорција 172
7.7 Графичко решавање систем равенки 174
7.8 Решавање систем равенки со метод на елиминација 175
7.9 Множење два алгебарски израза 180
7.10 Обиди и грешки 183
7.11 Неравенки 185
Задачи за повторување 190

8 Геометрија и решавање проблеми 192
8.1 Конструкција на прави 193
8.2 Конструкција на правилни многуаголници 197
8.3 Геометриско место на точки 200
8.4 Агли на многуаголник 203
8.5 Правилни мозаици 214
8.6 Мапи и азимут 217
8.7 Питагорова теорема 222
8.8 Примена на Питагорова теорема 226
Задачи за повторување 230

9 Мерење и решавање проблеми 236
9.1 Средна брзина 236
9.2 Изведени мерни единици 240
9.3 Волумен 246
9.4 Призма и цилиндар 249
Задачи за повторување 254

10 Работа со податоци и решавање проблеми 257
10.1 Дијаграми со точки и корелација 257
10.2 Експериментална веројатност 263
10.3 Исходи што заемно се исклучуваат 268
10.4 Табела на исходи 271
Задачи за повторување 275

Задачи за самопроверка за теми 1 и 6 277
Задачи за самопроверка за теми 2 и 7 284
Задачи за самопроверка за теми 3 и 8 288
Задачи за самопроверка за теми 4 и 9 295
Задачи за самопроверка за теми 5 и 10 300

Речник 305

Вовед

Овој учебник е адаптиран според националната наставна програма по математика донесена од Бирото за развој на образованието на Р. Македонија и одобрена од Министерството за образование и наука на Р. Македонија.

Учебникот се користи на лесен и флексибилен начин, бидејќи во целост го следи редоследот на наставните цели на програмата во првото и во второто полугодие, поттикнувајќи ги учениците активно да се вклучат во содржините за да ги развијат истражувачките вештини напоредно со тематското знаење.

Следниве секции и ознаки се креирани за полесно следење низ содржините на учебникот:

Наставни цели

Наставните цели се во согласност со наставната програма за ова одделение и преку нив се опишуваат подрачјата што се изучуваат и очекуваните резултати во секоја тема.

Примери

Во секоја лекција се дадени решени примери со цел да се илустрираат и прошират содржините што се обработуваат во таа наставна целина. Учениците би требало да ги решаваат овие примери самостојно, а потоа да ги споредат своите со дадените решенија.

Менталните стратегии, техники и вештини во решавањето математички проблеми се застапени низ содржините на целата книга.

Задачи за практична примена: Со овие задачи се развиваат знаењето и вештините на тој начин што ќе се поттикнуваат учениците да размислуваат креативно или да развијат методичен пристап, честопати работејќи на задачи од секојдневието.

Задачи за проширување на знаењето: Овие задачи претставуваат дополнителен предизвик во однос на вообичаените задачи во овој учебник. Во нив се бара да се применат и прошират научените содржини од секоја лекција.

Во рамка се дадени корисни упатства и совети што треба да се запомнат заради полесно решавање на математичките проблеми.

Клучни зборови: првиот пат кога ќе се појави клучен збор во учебникот, тој ќе биде нагласен со задебелени **црвени букви**. Дефинициите на сите клучни зборови можат да се најдат во речникот на крајот од учебникот.

За увежбување на вештините и примената на знаењата, како за домашна, така и за училишна работа, дополнително, издавачот „Арс Ламина – публикации", преку страницата obrazovanie.literatura.mk обезбедува бесплатен пристап до мноштво онлајн ресурси за наставниците и идеи за реализација на наставата, како и материјали и совети за родителите (за работа со децата и идеи за проекти надвор од училницата). Сите овие ресурси обезбедуваат голема поддршка во имплементацијата на наставната програма по овој предмет.

1 Број и решавање проблеми

Наставни цели

- Заокружува броеви до одреден број на децимални места; заокружувањето го користи за да дојде до решение на проблем со одреден степен на точност.
- Користи степени со степенов показател: нула, позитивен и негативен цел број и закони за множење и делење на степени чии степенови показатели се позитивни цели броеви.
- Собира, одзема, множи и дели цели броеви.
- Ја препознава еквивалентноста на 0,1; $\frac{1}{10}$ и 10^{-1}; множи и дели цели броеви или децимални броеви со степен со основа 10 и степенов показател кој било позитивен или негативен број.
- Ги препознава резултатите при множење и делење со броеви меѓу 0 и 1.
- Ја утврдува употребата на правилата за аритметички и инверзни операции за поедноставување на пресметувањето.
- Го проширува знаењето од ментални методи за пресметување, работејќи со децимални броеви, дропки, проценти и множители, користејќи белешки.
- Множи со децимални броеви, разбира каде да се стави децималната запирка, со користење на еквивалентни пресметки; дели со децимални броеви преку трансформирање во делењето со цел број.
- Го утврдува знаењето за запишување дропка во нескратлива форма со кратење на заедничките делители.
- Собира, одзема, множи и дели дропки, го толкува делењето како инверзна операција на множењето и крати со заеднички делители пред да множи или дели дропки.

Рачно пресметување



Пред откривањето на калкулаторите многу пресметки биле правени рачно.

Во употреба биле неколку пресметувачки алатки.

Една од нив е линијар со лизгач.

На сликите се прикажани еден кружен линијар со лизгач и еден правоаголен линијар со лизгач.



Линијарот со лизгач се користел за множење со премин и за делење преку собирање.

Пресметувањата се правеле со помош на степени и експоненти.

1.1 Заокружување броеви

Децимални места

Децималните броеви можеме да ги заокружуваме на даден број **децимални места (децимали)**.

Заокружувањето на едно децимално место (1 децимала) значи дека има 1 цифра по децималната запирка.

Заокружувањето на две децимални места (2 децимали) значи дека има 2 цифри по децималната запирка.

Децималните броеви можеме да заокружуваме на 3 децимали, на 4 децимали итн.

Кога заокружуваме на 1 децимала треба да ја разгледаме втората децимала.

Ако втората децимала е 5 или е поголема од 5, тогаш првата децимала треба да ја зголемиме за 1, односно заокружуваме „со вишок“. Ако втората децимала е помала од 5, тогаш првата децимала останува иста, односно заокружуваме „со кусок“.

Ако заокружуваме на 2 децимали, тогаш треба да ја разгледаме третата децимала. Наместо „децимални места“ понатаму ќе пишуваме „д.м.“

Пример 1

Заокружи ги броевите на даденият број децимални места.

а) 23,956 на 1 д.м.

б) 4,9762 на 2 д.м.

в) 23,5804 на 3 д.м.

г) 8,0325 на 3 д.м.

а) 23,956 е помеѓу 23,9 и 24,0.

Втората децимала е поголема од 5, па првата децимала треба да ја зголемиме за 1, значи ќе биде 10 (пишуваме 0 и 1 преминува во целиот број).

23,956 е 24,0 на 1 д.м. Нулата на крајот во 24,0 ни кажува дека бројот е заокружен на 1 д.м.

б) 4,9762 е помеѓу 4,97 и 4,98.

Третата децимала е поголема од 5, па заокружуваме „со вишок“

4,9762 е 4,98 на 2 д.м.

в) 23,5804 е помеѓу 23,580 и 23,581

Четвртата децимала е помала од 5, па заокружуваме „со кусок“

23,5804 е 23,580 до 3 д.м. Нулата на крајот на 23,580 ни кажува дека бројот е заокружен на 3 д.м.

г) 8,0325 е помеѓу 8,032 и 8,033

Четвртата децимала е поголема или еднаква на 5, па заокружуваме „со вишок“

8,0325 е 8,033 до 3 д.м.

Значајни цифри

Броевите можеме да ги заокружиме на даден број **значајни цифри**.

Значајните цифри ги одредуваме почнувајќи одлево од првата ненултата цифра.

Наместо „значајни цифри“, кратко ќе запишуваме „з.ц.“.

Значајни цифри за бројот 342,014:

3	4	2	,	0	1	4
↑	↑	↑		↑	↑	↑
прва з.ц.	втора з.ц.	трета з.ц.		четврта з.ц.	петта з.ц.	шеста з.ц.

Првата значајна цифра е 3. Таа е најзначајна цифра бидејќи нејзината вредност е 300.

Значајни цифри за бројот 0,0345:

0	,	03	4	5
		↑	↑	↑
		прва з.ц.	втора з.ц.	трета з.ц.

Првата значајна цифра е 3. Нулите на почетокот на бројот не се значајни цифри.

Кога треба некој број да го заокружиме на даден број значајни цифри ја разгледуваме следната значајна цифра. Ако таа е 5 или поголема од 5, тогаш претходната значајна цифра ја зголемуваме за 1. Во спротивно, претходната значајна цифра останува иста. Многу слично како начинот на заокружување броеви, но во овој случај ги разгледуваме само значајните цифри.

Пример 2

Заокружи ги броевите на 2 значајни цифри.

а) 789 **б)** 6,0524 **в)** 0,002534 **г)** 0,603

а)

7	8	9
↑	↑	↑
прва з.ц.	втора з.ц.	трета з.ц.

Третата значајна цифра е поголема од 5, па заокружуваме со вишок.

789 = 790 (2 з.ц.)

Секогаш проверувајте дали најзначајната цифра по заокружувањето има иста месна вредност како пред заокружувањето. Во примерот, 7 вреди 700 пред заокружувањето и повторно вреди 700 по заокружувањето“

б)

6	,	0	5	2	4
↑		↑	↑		
прва з.ц.		втора з.ц.	трета з.ц.		

Третата значајна цифра е 5, па заокружуваме со вишок.

6,0524 = 6,1 (2 з.ц.)

в) 0 , 0 0 2 5 3 4
↑ ↑ ↑
прва втора трета
з.ц. з.ц. з.ц.

Третата значајна цифра е помала од 5, па заокружуваме со кусок.

0,002534 = 0,0025 (2 з.ц.)

г) 0 , 6 0 3
↑ ↑ ↑
прва втора трета
з.ц. з.ц. з.ц.

Третата значајна цифра е помала од 5, па заокружуваме со кусок.

0,603 = 0,60 (2 з.ц.)

На колку значајни цифри да заокружиме?

Понекогаш треба да одлучиме со колкава точност ќе го заокружиме бројот, односно со колку значајни цифри ќе го запишеме бројот. Бројот на значајните цифри го нарекуваме **степен на точност.**

Крајното решение не смее да има повеќе значајни цифри од бројот на значајните цифри на броевите користени во пресметката.

Пример 3

Андреј направил 16 колачиња користејќи вкупно 125 g брашно.

Колку брашно има во секое колаче?

Решението претстави го со одреден степен на точност.

125 : 16 = 7,8125 g

Брашното било измерено до 3 значајни цифри (според бројот даден во условот на задачата).

Масата на брашното во едно колаче не може да содржи повеќе од 3 значајни цифри.

7,8 g (2 з.ц.) е добро одбрана точност, бидејќи е заокружено на 2 значајни цифри што е за 1 значајна цифра помалку од бројот значајни цифри на дадениот број во задачата.

Задачи

1. Заокружи ги броевите на дадениот број децимални места.

а) 12,59 на 1 д.м. **б)** 3,428 на 2 д.м. **в)** 5,98 на 1 д.м. **г)** 49,9752 на 1 д.м.

д) 19,95 на 1 д.м. **ѓ)** 1,0508 на 3 д.м. **е)** 3,05 на 1 д.м. **ж)** 5,8602 на 3 д.м.

2. Заокружи ги броевите на 2 значајни цифри.

а) 48,2 **б)** 2,59 **в)** 5,605 **г)** 8,03

д) 40,09 **ѓ)** 7,98 **е)** 29,7 **ж)** 49,09

3. Заокружи ги броевите на 1 значајна цифра.

а) 32 **б)** 407 **в)** 970 **г)** 2348

д) 0,056 **ѓ)** 76,8 **е)** 8345 **ж)** 99

4. Заокружи ги броевите на 3 значајни цифри.

а) 4589 **б)** 23,56 **в)** 1,0435 **г)** 0,002387

д) 0,04289 **ѓ)** 0,05832 **е)** 0,0088412 **ж)** 0,05997

5. Пресметај со калкулатор.

Решенијата заокружи ги на 2 значајни цифри.

а) 23 : 7 **б)** 6 : 38 **в)** 3 : 129 **г)** 520 · 530

д) 0,28 : 34 **ѓ)** 20 : 3 **е)** 8 : 9 **ж)** 49 : 11

6. Една пица со маса 0,850 kg треба еднакво да се подели помеѓу 6 луѓе.

По колку ќе добие секој? Запиши го решението во килограми со соодветен степен на точност.

7. Александар трча 125 m за 22,5 секунди.

Колку метри поминува секоја секунда? Запиши го решението со соодветен степен на точност.

8. Лејла измерила растојание од 100 m.

Објасни со примери зошто не можеме да кажеме дали бројот е заокружен на 1, 2 или 3 значајни цифри.

9. Марко пресметал 3,5 · 3,5 = 12,25.

Обиди се со други броеви да го провериш ова тврдење.

3,25 · 3,25 = 10,5625

3,255 · 3,255 = 10,595025

Тој вели: „Кога множиш број со 1 д.м. со број со 1 д.м. секогаш добиваш резултат со 2 д.м.“,

„а кога множиш број со 2 д.м. со број со 2 д.м. секогаш добиваш резултат со 4 д.м.“ итн.

Дали е Марко во право?

10. Филип ја измерил ширината на неговата книга. Измерил 23,5 cm заокружено на 1 децимално место. Колкави би можеле да бидат најмалата и најголемата вредност на ширината?

1.2 Степени

Степенов показател

Во записот 5^3 бројот ^{3} запишан во горниот дел на бројот 5, го нарекуваме **степенов показател** или **експонент**. Степеновиот показател ни кажува колку пати бројот 5 е помножен сам со себе.

Бројот 5 го нарекуваме **основа**.

Експонентот покажува колку пати основата е помножена сама со себе.

$4^6 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4096$

Шест четворки се множат меѓу себе. Да го разгледаме множењето, чекор по чекор.

$4 \cdot 4 = 16 \quad 16 \cdot 4 = 64 \quad 64 \cdot 4 = 256 \quad 256 \cdot 4 = 1024 \quad 1024 \cdot 4 = 4096$

Еве уште неколку примери:

$9^4 = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 6561$

$3^7 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2187$

$7^1 = 7$

Во последниот пример експонентот 1 не е потребен.

За секој број може да се смета дека има експонент 1.

$x^1 = x$

Пример 1

Запиши во вид на степен.

а) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

б) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

в) $3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$

а) Осум петки се множат меѓу себе.

$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^8$

б) Има шест десетки.

$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6$

в) Има две тројки и пет четворки.

Основите се различни, па запишувањето на степените го правиме одделно.

$3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 3^2 \cdot 4^5$

Пример 2

Пресметај ја вредноста на следните степени:

а) 2^6 **б)** 6^3 **в)** 8^7

а) $2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$

б) $6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

в) Решенијата под **а)** и **б)** лесно ги пресметуваме без употреба на калкулатор.

Под **в)** ќе користиме калкулатор. На калкулаторот има копче означено со x^y или $x^{\square}$.

Добиваме дека $8^7 = 2097152$

Правила за операции со степени со еднакви основи

Да го разгледаме производот $6^4 \cdot 6^3$.

Можеме да го запишеме вака: $6^4 \cdot 6^3 = (6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6) \cdot (6 \cdot 6 \cdot 6) = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^7$

четири шестки три шестки седум шестки

Скратено: $6^4 \cdot 6^3 = 6^{4+3} = 6^7$

Значи, **правило за множење степени со еднакви основи е:**

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

Кога се множат степени со еднакви основи, основата останува иста, а експонентите се собираат.

Сега да го разгледаме делењето $7^5 : 7^3$

Ако го запишеме во форма на дропка, добиваме: $7^5 : 7^3 = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{7 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{7 \cdot 7 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7}}{\cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7}}$

$= 7 \cdot 7 = 7^2$

По скратувањето, останаа $5 - 3 = 2$ седумки.

Скратено: $7^5 : 7^3 = 7^{5-3} = 7^2$

Значи, **правило за делење степени со еднакви основи е:**

$$x^a : x^b = x^{a-b}$$

Кога се делат степени со еднакви основи, основата останува иста, а експонентите се одземаат.

Да откриеме уште две нови правила.

Да го разгледаме делењето $6^5 : 6^5$.

Ако го искористиме правилото за делење степени, добиваме $6^5 : 6^5 = 6^{5-5} = 6^0$.

Ако поделиме, имаме $6^5 : 6^5 = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} = 1$.

Две решенија на една иста задача мораат да бидат еднакви.

Добиваме $6^0 = 1$.

Ова е точно за секое делење во форма $x^a : x^a$ и води кон следното правило:

$$x^0 = 1$$

Кој било ненулти број степенуван на 0 е еднаков на 1.

Да го разгледаме степенот $(4^2)^5$.

Тоа значи $4^2 \cdot 4^2 \cdot 4^2 \cdot 4^2 \cdot 4^2 = 4^{10}$.

Знаеме дека $10 = 2 \cdot 5$.

Да го разгледаме $(6^3)^4 = 6^3 \cdot 6^3 \cdot 6^3 \cdot 6^3 = 6^{12}$.

Во овој случај знаеме дека $12 = 3 \cdot 4$.

Така го добивме **правилото за степенување степен:**

$$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$$

При степенување степен, основата останува иста, а експонентите се множат.

Пример 3

Упрости ги степените.

а) $7 \cdot 7^3$ **б)** $8^9 : 8^5$ **в)** $(3^2)^7$ **г)** $5^3 \cdot (5^4)^3 : 5^7$

а) При множење степени, експонентите ги собираме.

Знаеме дека $7 = 7^1$

$7^1 \cdot 7^3 = 7^4$

б) При делење степени, експонентите ги одземаме.

$8^9 : 8^5 = 8^4$

в) При степенување степен, експонентите ги множиме.

$(3^2)^7 = 3^{14}$

г) Ова е комбинација на множење, делење и степенување степени.

$5^3 \cdot (5^4)^3 : 5^7$

$= 5^3 \cdot 5^{12} : 5^7$

$= 5^{3+12-7} = 5^8$

Пример 4

Пресметај ги вредностите на изразите.

а) $4^6 : 4^4$ **б)** 25^0 **в)** $7^4 \cdot 7^5 : 7^8$

а) $4^6 : 4^4 = 4^2 = 16$ Полесно е ако го упростиме изразот пред степенувањето.

б) $25^0 = 1$ Кој било број степенуван на 0 е еднаков на 1.

в) $7^4 \cdot 7^5 : 7^8 = 7^{4+5-8} = 7^1 = 7$

Задачи

1. Запиши ги следните производи во вид на степен.

а) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

б) $5 \cdot 5 \cdot 5$

в) $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$

г) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

д) $11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11$

ѓ) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

е) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4$

ж) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$

з) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$

ѕ) $x \cdot y \cdot y \cdot y$

и) $a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot c \cdot c$

ј) $p \cdot q \cdot r \cdot p \cdot q \cdot q \cdot r \cdot r$

2. Пресметај ја вредноста на степените:

а) 2^4 **б)** 3^3 **в)** 5^4 **г)** 10^5 **д)** 9^2

ѓ) 1^8 **е)** 1^{10} **ж)** 8^0 **з)** 12^1 **ѕ)** 15^0

3. Упрости ги изразите. Решенијата запиши ги во вид на степен.

а) $3^4 \cdot 3^5$ **б)** $4^7 \cdot 4^2$ **в)** $5^9 \cdot 5^2$ **г)** $3 \cdot 3^4$

д) $7^4 : 7^2$ **ѓ)** $6^8 : 6^5$ **е)** $10^{11} : 10^4$ **ж)** $5^9 : 5^8$

з) $(2^3)^3$ **ѕ)** $(3^4)^2$ **и)** $(10^2)^4$ **ј)** $(7^4)^6$

4. Упрости ги изразите. Решенијата запиши ги во вид на степен.

а) $8^2 \cdot 8^3 \cdot 8^4$ **б)** $5^9 \cdot 5^2 : 5^6$ **в)** $(8^2)^3 : 8^6$

г) $(5^3)^4 \cdot 5$ **д)** $7^3 \cdot 7 : 7^2$ **ѓ)** $(9^4)^5 : (9^3)^6$

е) $(5^7)^3 \cdot 5^2 : 5^8$ **ж)** $3^5 \cdot 3^3 : 3^8$ **з)** $2 \cdot 2^3 : 2^4$

ѕ) $x^5 \cdot x^4 \cdot x^2$ **и)** $y^8 \cdot y^4 : y^{10}$ **ј)** $(t^3)^2 \cdot t^6 : t^5$

5. Упрости ги изразите и потоа пресметај ја нивната вредност.

а) $2^3 \cdot 2^4 : 2^5$ **б)** $(6^3)^4 : 6^{10}$ **в)** $(5^3)^4 : (5^2)^6$

г) $7^5 : 7^4$ **д)** $10^7 \cdot 10 : 10^6$ **ѓ)** $3^5 \cdot (3^3)^3 : 3^{11}$

6. Одреди ја вредноста на x во равенките:

а) $9^x = 1$ **б)** $(5^x)^3 = 5^6$ **в)** $(8^4)^x = 8^{20}$

г) $(10^x)^4 = (10^6)^2$ **д)** $(3^x)^6 = 3^6$

Под **б)**, **в)**, **г)** и **д)** запиши ги двете страни како степен. На пример, под **б)** запиши $5^{3x} = 5^6$, па оттука $3x = 6$.

Негативен степенов показател

Да го разгледаме делењето $4^2 : 4^3$.

Од правилото за делење степени, добиваме: $4^2 : 4^3 = 4^{-1}$.

Но, ако поделиме добиваме $4^2 : 4^3 = \frac{\cancel{4} \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot 4} = \frac{1}{4}$.

Одовде добиваме дека $4^{-1} = \frac{1}{4}$.

Сега да го разгледаме делењето $2 : 2^4$.

Според правилото за делење на степени: $2 : 2^4 = 2^{-3}$.

ако поделиме, добиваме: $2 : 2^4 = \frac{\cancel{2}}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{2}} = \frac{1}{2^3}$.

добиваме дека $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$.

Ова се два примера за општото правило, за $a > 0$:

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$

Пример 5

Пресметај:

а) 3^{-2} **б)** $10^3 \cdot 10^{-5}$

а) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

б) $10^3 \cdot 10^{-5} = 10^{3-5}$

$= 10^{-2}$

$= \frac{1}{10^2}$

$= \frac{1}{100}$

Пример 6

Упрости ги изразите. Решенијата запиши ги во вид на степен.

а) $6^3 \cdot 6^{-5} \cdot 6^4$ **б)** $(3^4)^{-1} : (3^{-2})^3$

а) $6^3 \cdot 6^{-5} \cdot 6^4$

$= 6^{3+(-5)+4}$

$= 6^2$

б) $(3^4)^{-1} : (3^{-2})^3$

$= 3^{(-4)-(-6)}$

$= 3^{-4+6}$

$= 3^2$

Ги применуваме правилата за собирање и за одземање позитивни и негативни броеви.

Задачи

1. Запиши ги степените како дропки:

а) 2^{-4} **б)** 3^{-1} **в)** 5^{-3} **г)** 10^{-2}

д) 8^{-2} **ѓ)** 7^{-2} **е)** 3^{-3} **ж)** 2^{-3}

з) 15^{-2} **ѕ)** 10^{-3}

2. Одреди ја вредноста на следниве изрази како дропка или како цел број.

а) $5^2 \cdot 5^{-3}$ **б)** $6 \cdot 6^{-1}$ **в)** $2^4 \cdot 2^{-3}$ **г)** $10^{-2} \cdot 10$

д) $7^4 \cdot 7^{-5}$ **ѓ)** $3^4 \cdot 3^{-6} \cdot 3^2$ **е)** $2^9 : 2^{10}$ **ж)** $3 : 3^{-1}$

з) $6^2 : 6^3$ **ѕ)** $10^4 : 10^3$ **и)** $2^5 \cdot 2^{-1} : 2^2$ **ј)** $4^2 \cdot 4^{-5} \cdot 4$

3. Упрости ги изразите. Решенијата запиши ги во вид на степен.

а) $4^3 \cdot 4^{-7}$ **б)** $5^{-2} \cdot 5^5$ **в)** $8^2 : 8^4$ **г)** $6^7 : 6^{-3}$

д) $(3^2)^{-1} \cdot 3^{-4}$ **ѓ)** $2^5 : (2^2)^{-3}$ **е)** $2 \cdot 2^{-5} : 2^3$ **ж)** $3^4 : 3^{-5} \cdot (3^2)^2$

з) $x^5 \cdot x^{-5}$ **ѕ)** $x^4 \cdot x^{-6}$ **и)** $y^2 : y^5$ **ј)** $x^7 : x^{-2} \cdot x^{-4}$

4. Пресметај ја вредноста на изразите:

а) $9 \cdot 3^{-3}$ **б)** $8 \cdot 2^{-4}$ **в)** $10^{-3} \cdot 100$ **г)** $16 : 2^4$

д) $4^3 : 2^5$ **ѓ)** $9^2 \cdot 3^{-3}$ **е)** $4^{-3} \cdot 8^2$ **ж)** $8^2 : 2^3 \cdot 4^{-2}$

5. Одреди ја вредноста на x во следниве равенки:

а) $(3^2)^x = \frac{1}{9}$ Запиши ја десната страна како степен од 3. $\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2}$, па $3^{2x} = 3^{-2}$

б) $(2^x)^2 = \frac{1}{16}$ **в)** $5^x \cdot 5^6 = 25$ **г)** $7^4 \cdot 7^x = 49$

д) $(2^x)^x = 16$ Внимавај, има две можни решенија за x.

1.3 Целобројни степени со основа 10

Читање и запишување целобројни степени со основа 10

Знаеме дека:

$10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1000$

$10 \cdot 10 = 10^2 = 100$

$10 = 10^1 = 10$

Да го разгледаме правилото на оваа низа. Секогаш кога степенот се намалува за 1, забележуваме дека:

1. на левата страна има една десетка помалку,

2. вредноста на десната страна е поделена со 10.

Ако ја продолжиме низата, ќе имаме:

$1 = 10^0 = 1$

$\frac{1}{10} = 10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

$\frac{1}{10 \cdot 10} = 10^{-2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$

$\frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10} = 10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$

Броевите запишани како 10^2 и 10^{-3} ги нарекуваме записи во вид на степен или само степени.

Пример 1

Пресметај ги вредностите на степените: **а)** 10^6 **б)** 10^{-5}

а) $10^6 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000000$ (еден милион)

б) $10^{-5} = \frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{1}{100000} = 0{,}00001$

Пример 2

Запиши ги броевите во вид на степен: **а)** 10000 **б)** 0,0001

а) $10000 = 10^4$

б) $0{,}0001 = 10^{-4}$

Множење и делење со целобројни степени со основа 10

Пред да почнеме со операциите множење и делење, прво секој од степените со основа 10 го запишуваме како број, ако степенот е поголем од 0, или како дропка ако степенот е помал од 0. Потоа множиме или делиме.

Можеме да провериме дали резултатот е точен, на следниов начин:

Кога множиме со број помеѓу 0 и 1 резултатот треба да биде помал од почетниот број.

Кога делиме со број помеѓу 0 и 1 резултатот треба да биде поголем од почетниот број.

Пример 3

Пресметај:

а) $245 \cdot 10^3$

б) $0{,}25 \cdot 10^{-1}$

в) $2{,}45 : 10^{-3}$

г) $230 : 10^2$

а) $245 \cdot 10^3 = 245 \cdot 1000$ — Го запишуваме целобројниот степен од 10 како број (3 е поголем од 0, значи множиме $10 \cdot 10 \cdot 10$).

$= 245000$ — Проверка: 10^3 е поголем од 1, резултатот е поголем од 245. ✓

б) $0{,}25 \cdot 10^{-1} = 0{,}25 \cdot \frac{1}{10}$ — Го запишуваме целобројниот степен од 10 како дропка (-1 е помал од 0, значи делиме $1 : 10$).

$= 0{,}025$ — Проверка: 10^{-1} е помеѓу 0 и 1, резултатот е помал од 0,25. ✓

в) $2{,}45 : 10^{-3} = 2{,}45 : \frac{1}{1000}$ — Го запишуваме целобројниот степен на 10 како дропка (-3 е помал од 0).

$= 2{,}45 \cdot 1000$ — Делиме со дропка така што множиме со нејзината реципрочна дропка.

$= 2450$ — Проверка: 10^{-3} е помеѓу 0 и 1, одговорот е поголем од 2,45. ✓

г) $230 : 10^2 = 230 : 100$ — Го запишуваме целобројниот степен од 10 како број (2 е поголем од 0).

$= 2{,}3$ — Проверка: 10^2 е поголем од 1, одговорот е помал од 230. ✓

Задачи

Следните задачи реши ги без употреба на калкулатор.

1. Запиши ги броевите во вид на степен.

а) 10000000 **б)** 100 **в)** 100000 **г)** 0,00001 **д)** 0,1 **ѓ)** 0,000001

2. Пресметај ја вредноста на степените.

а) 10^3 **б)** 10^5 **в)** 10^9 **г)** 10^{-5} **д)** 10^{-2} **ѓ)** 10^0

3. Пресметај.

а) $2{,}3 \cdot 10^2$ **б)** $4{,}5 \cdot 10^4$ **в)** $210 \cdot 10^2$ **г)** $5{,}32 \cdot 10^5$

д) $0{,}45 \cdot 10^2$ **ѓ)** $20{,}1 \cdot 10^{-1}$ **е)** $508 \cdot 10^{-2}$ **ж)** $5{,}4 \cdot 10^{-3}$

4. Пресметај.

а) $289 : 10^2$ **б)** $305 : 10^{-1}$ **в)** $25{,}8 : 10^{-2}$ **г)** $240 : 10^3$

д) $0{,}25 : 10^{-3}$ **ѓ)** $0{,}205 : 10^1$ **е)** $2{,}5 : 10^2$ **ж)** $3{,}05 : 10^{-2}$

5. Препиши ги следниве изрази. Замени го знакот „?“ со целоброен степен со основа 10 за равенството да биде точно.

Спореди го производот со другиот множител и така ќе знаеш дали треба да множиш или да делиш со број поголем или помал од 1.

а) $40{,}8 \cdot ? = 408$ **б)** $248{,}9 \cdot ? = 2{,}489$ **в)** $48{,}5 : ? = 4850$ **г)** $2{,}8 : ? = 0{,}0028$

6. Препиши ги следните изрази. Замени го знакот „?“ со вредност за која равенството е точно.

Бараните броеви треба да ги содржат цифрите 2 и 4, во тој редослед.

а) $? \cdot 10^3 = 24$ **б)** $? \cdot 10^{-2} = 24$ **в)** $? : 10^6 = 2{,}4$ **г)** $? : 10^{-3} = 240$

7. Михаил ја добил следната задача од својот наставник.

$245 \square ? = 2{,}45$

Треба $\square$ да го замени со · или :

Треба ? да го замени со број.

Михаил вели дека има повеќе од едно решение.

Одреди колку што можеш повеќе решенија за $\square$ и ?

1.4 Множење и делење со децимални броеви

Множење со децимални броеви

Фактите што веќе ги знаеме може да ги искористиме за множење децимални броеви.
Може да користиме **еквивалентни пресметки** како помош при множење децимални броеви.

Разликата е во тоа што во конечниот резултат треба да ставиме запирка.

На пример, наместо да множиме со 0,3, прво множиме со 3, а потоа резултатот го делиме со 10.

Наместо да множиме со 0,03, прво множиме со 3, а потоа резултатот го делиме со 100.

Ако треба да пресметаме $300 \cdot 0{,}2$, тогаш 300 го делиме со 10 , и 0,2 го множиме со 10.

Тоа ни дава $30 \cdot 2$ како еквивалентна пресметка.

Сега лесно е да пресметаме $30 \cdot 2 = 60$.

Пример

Пресметај: **а)** $700 \cdot 80$ **б)** $400 \cdot 0{,}6$ **в)** $0{,}15 \cdot 0{,}06$

а) $700 \cdot 80 = 7 \cdot 100 \cdot 8 \cdot 10$
$= 7 \cdot 8 \cdot 100 \cdot 10$
$= 56 \cdot 1000$
$= 56000$

Овој начин можеме да го користиме за пресметување напамет.

б) $400 \cdot 0{,}6 = 40 \cdot 6$
$= 240$

Трансформираме во со еквивалентна пресметка, и го добиваме истиот резултат.

в) $0{,}15 \cdot 0{,}06$

Прво множиме без децималните запирки, $15 \cdot 6 = 90$.

Потоа го пресметуваме вкупниот број децимални места на множителите.

Во овој случај имаме вкупно 4 децимални места кај двата множителя.
Тоа значи дека во решението треба да има четири децимални места.

Резултатот е 0,0090.

Внимавај кога треба во решението да одвоиш децимални места. Треба да ги броиш децималните места на добиениот производ. Во нашиот пример, бројот 90 има 2 цифри и затоа допишавме уште 2 нули во конечниот резултат. Броењето на децималните места го правиме оддесно кон лево, односно одназад.

Задачи

Следните задачи реши ги без употреба на калкулатор.

1. Пресметај.

а) $30 \cdot 60$ **б)** $40 \cdot 30$ **в)** $20 \cdot 300$ **г)** $500 \cdot 30$

д) $400 \cdot 50$ **ѓ)** $60 \cdot 7000$ **е)** $600 \cdot 5000$ **ж)** $240 \cdot 600$

2. Пресметај.

а) $400 \cdot 0{,}2$ **б)** $300 \cdot 0{,}8$ **в)** $800 \cdot 0{,}7$ **г)** $500 \cdot 0{,}4$

д) $150 \cdot 0{,}3$ **ѓ)** $250 \cdot 0{,}7$ **е)** $125 \cdot 0{,}3$ **ж)** $25 \cdot 0{,}4$

3. Пресметај.

а) $0{,}25 \cdot 0{,}2$ **б)** $0{,}35 \cdot 0{,}4$ **в)** $0{,}24 \cdot 0{,}03$ **г)** $0{,}24 \cdot 0{,}4$

д) $0{,}02 \cdot 0{,}03$ **ѓ)** $0{,}32 \cdot 0{,}04$ **е)** $0{,}55 \cdot 0{,}4$ **ж)** $7{,}5 \cdot 0{,}4$

4. Што забележуваш кај изразите?

а) $12 \cdot 0{,}2$ $48 : 20$ $6 \cdot 0{,}4$ $24 \cdot 0{,}1$ $9{,}6 : 4$

б) $64 : 20$ $32 \cdot 10^{-1}$ $80 \cdot 0{,}04$ $96 : 30$ $12{,}8 : 4$

5. Запиши неколку изрази со множење и делење што имаат ист резултат 4,8.

6. Најди три броја, чиј производ е 0,08.

Најди три броја чиј производ е 8 и потоа одлучи каде треба да бидат децималните запирки во секој број.

7. Пресметај.

а) $1,5 \cdot 1,5$ **б)** $1,2 \cdot 1,2$ **в)** $1,6 \cdot 0,16$ **г)** $14 \cdot 0,14$

Делење со децимални броеви

Делењето со децимален број често го трансформираме во делење со **цел број**.

За таа цел користиме **еквивалентни дропки**.

Дропките што имаат еднакви вредности се еквивалентни дропки.

Пример

Пресметај:

а) $\frac{6}{0,2}$ **б)** $\frac{30}{0,1}$ **в)** $\frac{0,09}{0,01}$ **г)** $2,5 : 0,05$

а) $\frac{6}{0,2} \overset{\cdot 10}{\underset{\cdot 10}{=}} \frac{60}{2}$ Броителот и именителот ги множиме со 10.

$= 30$

б) $\frac{30}{0,1} \overset{\cdot 10}{\underset{\cdot 10}{=}} \frac{300}{1}$ Броителот и именителот ги множиме со 10.

$= 300$

в) $\frac{0,09}{0,01} \overset{\cdot 100}{\underset{\cdot 100}{=}} \frac{9}{1}$ Броителот и именителот ги множиме со 100.

$= 9$

г) $2,5 : 0,05 = \frac{2,5}{0,05}$ Делењето го запишуваме како дропка.

$\frac{2,5}{0,05} \overset{\cdot 100}{\underset{\cdot 100}{=}} \frac{250}{5}$ Броителот и именителот ги множиме со 100.

$= 50$

Задачи

Следните задачи реши ги без употреба на калкулатор.

1. Пресметај.

а) $\frac{6}{0,2}$ **б)** $\frac{16}{0,4}$ **в)** $\frac{12}{0,3}$ **г)** $\frac{20}{0,1}$

д) $\frac{1,4}{0,7}$ **ѓ)** $\frac{0,04}{0,2}$ **е)** $\frac{1,8}{0,3}$ **ж)** $\frac{80}{0,4}$

2. Пресметај.

а) $\frac{1,2}{0,02}$ **б)** $\frac{3,6}{0,09}$ **в)** $\frac{16}{0,08}$ **г)** $\frac{0,8}{0,04}$

д) $\frac{1,6}{0,02}$ **ѓ)** $\frac{4}{0,05}$ **е)** $\frac{0,15}{0,05}$ **ж)** $\frac{14}{0,07}$

3. Пресметај.

а) $\frac{28}{0,7}$ **б)** $\frac{32}{0,04}$ **в)** $\frac{15}{0,1}$ **г)** $\frac{49}{0,01}$

д) $\frac{120}{0,04}$ **ѓ)** $\frac{90}{0,9}$ **е)** $\frac{1,6}{0,04}$ **ж)** $\frac{0,08}{0,02}$

4. Пресметај.

а) 25 : 0,1 **б)** 1,6 : 0,4 **в)** 640 : 0,08 **г)** 0,8 : 0,02

5. Али рекол: „2,5 : 0,5 е 0,5“.

Каква грешка направил Али?

Како треба да гласи точниот одговор?

Прво пресметај го точното решение.

6. Маја има буре што содржи 140 литри вода.

Таа рекла: „Ако од бурето наполнам 70 шишиња, секое со по 0,5 литри, тогаш бурето ќе се испразни“.

Прво пресметај го точното решение.

Каква грешка направила Маја?

Колку најмногу шишиња може да наполни од бурето?

7. **а)** 0,3 kg злато се продава за 712521 денари.
Колкава е цената на еден килограм злато?

б) 0,4 kg платина се продава за 980220 денари.
Дали е поскапо да купиш 1 kg платина или 1 kg злато? Објасни ја постапката.

Прво пресметај колку чини 1 kg платина.

8. Пресметај.

а) 225 : 1,5 **б)** 125 : 2,5 **в)** 90 : 1,5

9. Една цевка е исечена на парчиња. Секое парче е долго 0,25 метри.

Ако цевката е долга 4 метри, тогаш колку парчиња со дадената должина можат да се пресечат од неа?

1.5 Собирање и одземање дропки

Еквивалентни дропки

Дропките $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{4}{16}$ имаат еднаква вредност. Тие се наречени **еквивалентни** дропки.

Ако **броителот** и **именителот** на една дропка ги помножиме со ист број, ќе добиеме еквивалентна дропка. Броителот е бројот над дробната црта, а именителот е бројот под дробната црта.

Ако броителот и именителот на една дропка ги поделиме со ист број, ќе добиеме еквивалентна дропка. Можеме да делиме само со заедничките делители на броителот и именителот.

Тоа обично се нарекува **упростување** или **скратување**.

Кога не може повеќе да ја упростиме дропката, се вели дека е **нескратлива**. Тогаш таа е во нејзината најпроста форма.

Пример 1

Упрости ја дропката до нескратлива дропка: $\frac{28}{32}$

$$\frac{28}{32} \overset{:2}{\underset{:2}{=}} \frac{14}{16} \overset{:2}{\underset{:2}{=}} \frac{7}{8}$$

Ова можеме да го направиме во еден чекор ако броителот и именителот ги поделиме со 4.

$$\frac{28}{32} = \frac{7}{8}$$

Дропката не може повеќе да ја упростиме. Таа е нескратлива дропка.

Собирање дропки

Дропките треба да имаат ист именител за да можеме да ги собираме.

Ако дропките немаат ист именител, постапуваме на следниот начин:

Го одредуваме најмалиот заеднички содржател на сите именители.

Ја запишуваме секоја од дропките со тој именител.

Ги собираме двете дропки.

Го упростуваме решението, ако е тоа можно.

Еден начин на собирање **мешани броеви** е одделно да ги собереме целите броеви, а одделно правилните дропки. Исто така, мешаните броеви можеме да ги собираме, ако претходно ги претвориме во неправилни дропки, а потоа ја примениме постапката за собирање дропки.

Мешан број е составен од цел број и правилна дропка.

Пример 2

Пресметај: $\frac{5}{6} + \frac{7}{8}$

Најмалиот заеднички содржател на 6 и 8 е 24.

$$\frac{5}{6} \overset{\cdot 4}{\underset{\cdot 4}{=}} \frac{20}{24} \qquad \frac{7}{8} \overset{\cdot 3}{\underset{\cdot 3}{=}} \frac{21}{24}$$

$$\frac{5}{6} + \frac{7}{8} = \frac{20}{24} + \frac{21}{24}$$

$$= \frac{20 + 21}{24}$$

$$= \frac{41}{24}$$

$$= 1\frac{17}{24}$$

Пример 3

Пресметај: $1\frac{5}{6}+2\frac{7}{8}$

$1\frac{5}{6}+2\frac{7}{8}=1+2+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}$ Ги разделуваме целите делови од правилните дропки.

$=3+\frac{20}{24}+\frac{21}{24}$ Ги собираме целите делови, а правилните дропки ги запишуваме со еднакви именители.

$=3+\frac{41}{24}$ Ги собираме правилните дропки.

$=3+1+\frac{17}{24}$ Неправилната дропка ја запишуваме како збир од цел дел и правилна дропка.

$=4\frac{17}{24}$

Одземање дропки

Одземањето дропки е слично на собирањето дропки.

Ако дропките немаат ист именител, постапуваме на следниот начин:

Го одредуваме најмалиот заеднички содржател на именителите.

Ја запишуваме секоја од дропките со тој именител.

Ги одземаме двата броителa.

Го упростуваме решението, ако е можно.

Кога одземаме мешани броеви, еден начин е нив да ги запишеме како **неправилни дропки**.

Дропката е неправилна ако броителот е поголем од именителот.

Пример 4

Пресметај: $1\frac{1}{2}-\frac{4}{5}$

$1\frac{1}{2}-\frac{4}{5}=\frac{3}{2}-\frac{4}{5}$ Мешаниот број го запишуваме како неправилна дропка.

$\frac{3}{2}\overset{\cdot 5}{=}\frac{15}{10}$ $\frac{4}{5}\overset{\cdot 2}{=}\frac{8}{10}$ Најмалиот заеднички содржател на 2 и 5 е 10.

$\frac{3}{2}-\frac{4}{5}=\frac{15}{10}-\frac{8}{10}$

$=\frac{15-8}{10}$

$=\frac{7}{10}$ Ги одземаме броителите.

Пример 5

Пресметај: $3\frac{1}{4} - 1\frac{2}{5}$

$3\frac{1}{4} - 1\frac{2}{5} = \frac{13}{4} - \frac{7}{5}$ Мешаните броеви ги запишуваме како неправилни дропки.

$\frac{13}{4} \overset{\cdot 5}{=} \frac{65}{20}$ $\frac{7}{5} \overset{\cdot 4}{=} \frac{28}{20}$ Најмалиот заеднички содржател на 4 и 5 е 20.

$\frac{13}{4} - \frac{7}{5} = \frac{65}{20} - \frac{28}{20}$

$= \frac{65 - 28}{20}$

$= \frac{37}{20}$ Ги одземаме броителите.

$= 1\frac{17}{20}$ Неправилната дропка ја запишуваме како мешан број.

Задачи

1. Запиши ги дропките како нескратливи дропки.

а) $\frac{4}{24}$ **б)** $\frac{16}{52}$ **в)** $\frac{12}{99}$ **г)** $\frac{18}{32}$

2. Пресметај. Решенијата запиши ги како нескратливи дропки.

а) $\frac{3}{8} + \frac{3}{4}$ **б)** $\frac{2}{5} + \frac{3}{7}$ **в)** $\frac{3}{8} + \frac{1}{6}$ **г)** $1\frac{3}{4} + 1\frac{2}{3}$

3. Пресметај. Решенијата запиши ги како нескратливи дропки.

а) $\frac{7}{8} - \frac{5}{16}$ **б)** $\frac{2}{3} - \frac{4}{7}$ **в)** $2\frac{3}{8} - \frac{2}{3}$ **г)** $2\frac{4}{9} - \frac{7}{12}$

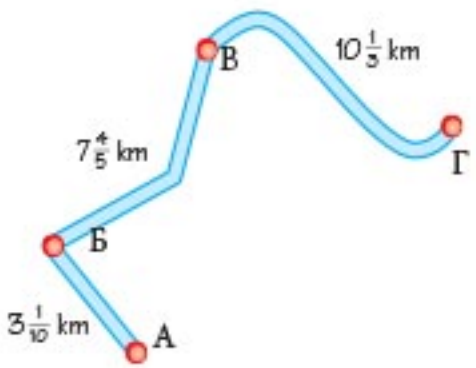
4. Пресметај. Решенијата запиши ги како нескратливи дропки.

а) $\frac{11}{18} + \frac{7}{24}$ **б)** $\frac{13}{36} + \frac{11}{20}$ **в)** $\frac{7}{24} - \frac{5}{30}$ **г)** $\frac{8}{15} - \frac{7}{27}$

5. Пресметај. Решенијата запиши ги како нескратливи дропки.

а) $3\frac{5}{12} + 4\frac{11}{18}$ **б)** $7\frac{17}{24} + 3\frac{15}{32}$ **в)** $5\frac{7}{18} - 2\frac{11}{12}$ **г)** $4\frac{11}{24} - 1\frac{13}{18}$

6. Никола вози велосипед од местото А до местото Г. Тој попатно застанал во местата Б и В.



Колку вкупно пат во километри поминал Никола? Решението запиши го како нескратлива дропка.

7. Полна тегла мармалад има вкупна маса $\frac{9}{20}$ kg.

Само мармаладот има маса $\frac{7}{24}$ kg.

Колкава е масата на теглата?

8. Пресметај ги дропките што недостигаат.

а) $2\frac{5}{12} + ? = 4\frac{5}{16}$ **б)** $5\frac{7}{12} - ? = \frac{11}{18}$

Прво запиши ги дропките како неправилни дропки.

9. **а)** Броевите $\frac{1}{2}$, a, $\frac{3}{4}$ се подредени во растечки редослед.

Вредноста на a е точно на средина помеѓу $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{4}$.

Користи еквивалентни дропки.

Пресметај ја вредноста на a.

б) Броевите $\frac{1}{2}$, m, n, $\frac{3}{4}$ се подредени во растечки редослед.

Разликите помеѓу кои било два соседни броја се еднакви.

Пресметај ги вредностите на m и n.

10. Пресметај. Решенијата запиши ги како нескратливи дропки.

а) $1\frac{2}{5} + \frac{7}{20} + \frac{7}{30}$ **б)** $1\frac{4}{5} + \frac{1}{6} + \frac{7}{12}$ **в)** $1\frac{3}{5} + 2\frac{5}{6} + \frac{8}{15}$

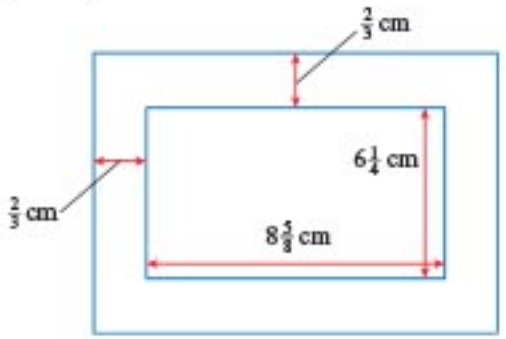
г) $4\frac{1}{4} + \frac{3}{5} - \frac{7}{20}$ **д)** $3\frac{2}{3} + 1\frac{5}{6} - \frac{14}{15}$ **ѓ)** $4\frac{3}{8} + \frac{7}{12} - \frac{5}{6}$

11. Правоаголна фотографија е долга $6\frac{1}{4}$ cm и широка $8\frac{5}{8}$ cm.

а) Колкав е периметарот на фотографијата?

б) Фотографијата е ставена во рамка со ширина $\frac{2}{3}$ cm.

Колкав е периметарот на рамката?



1.6 Множење дропки

Множење цел број со дропка

Производот $3 \cdot \frac{4}{5}$ можеме да го запишеме како $\frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{4}{5}$, односно како $\frac{4+4+4}{5} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$.

Цел број множиме со дропка така што именителот останува ист, а броителот го множиме со целиот број.

За да пресметаме дел од една вредност, дадената дропка ја множиме со таа вредност. Да се потсетиме дека „од“ значи „помножи“, според тоа $\frac{2}{3}$ од 36 значи $\frac{2}{3} \cdot 36$.

Пример 1

Пресметај: **а)** $\frac{5}{8} \cdot 36$ **б)** $\frac{7}{12}$ од 18

а) $\frac{5}{8} \cdot 36 = \frac{180}{8}$

$= \frac{45}{2}$

$= 22\frac{1}{2}$

б) $\frac{7}{12} \cdot 18 = \frac{126}{12}$

$= \frac{21}{2}$

$= 10\frac{1}{2}$

Ако прво помножиме, можат да се појават големи броеви. За да избегнеме работа со големи броеви, прво скратуваме, а потоа множиме.

а) $\frac{5}{\cancel{8}_{2}} \cdot \overset{9}{\cancel{36}} = \frac{45}{2}$ Скратуваме со 4.

$= 22\frac{1}{2}$

б) $\frac{7}{\cancel{12}_{2}} \cdot \overset{3}{\cancel{18}} = \frac{21}{2}$ Скратуваме со 6.

$= 10\frac{1}{2}$

Множење дропка со дропка

Производот на две дропки е дропка чиј броител е еднаков на производот на броителите на тие дропки, а именителот е еднаков на производот од нивните именители.

За да избегнеме големи броеви, пред множењето вршиме скратувања, како во Пример 2.

Кога множиме мешани броеви, претходно мораме да ги запишеме како неправилни дропки.

Пример 2

Пресметај ги производите. Решенијата запиши ги како нескратливи дропки.

а) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8}$ **б)** $\frac{7}{12} \cdot \frac{3}{28}$

а) $\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{3} \cdot \frac{5}{\cancel{8}_{4}} = \frac{5}{12}$ Скратуваме со 2.

б) $\frac{\overset{1}{\cancel{7}}}{\cancel{12}_{4}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{28}_{4}} = \frac{1}{16}$ Скратуваме со 7, па скратуваме со 3.

Пример 3

Пресметај. Решенијата запиши ги како нескратливи дропки.

Во решенијата, неправилните дропки запиши ги како мешани броеви.

а) $2\frac{5}{8} \cdot 2\frac{2}{7}$ **б)** $3\frac{3}{7} \cdot 2\frac{1}{10}$

а) $2\frac{5}{8} \cdot 2\frac{2}{7} = \frac{21^{3}}{1\,8} \cdot \frac{16^{2}}{7_{1}} = \frac{6}{1} = 6$

б) $3\frac{3}{7} \cdot 2\frac{1}{10} = \frac{24^{12}}{7_{1}} \cdot \frac{21^{3}}{10_{5}} = \frac{36}{5} = 7\frac{1}{5}$

Задачи

1. Пресметај. Решенијата запиши ги како нескратливи дропки.

Во решенијата, неправилните дропки запиши ги како мешани броеви.

а) $\frac{2}{3}$ од 36 **б)** $\frac{3}{8}$ од 24 **в)** $\frac{2}{5}$ од 24 **г)** $\frac{5}{12}$ од 16

д) $\frac{3}{4} \cdot 24$ **ѓ)** $\frac{7}{8} \cdot 20$ **е)** $\frac{7}{15} \cdot 24$ **ж)** $\frac{5}{12} \cdot 28$

2. Пресметај. Решенијата запиши ги како нескратливи дропки.

Во решенијата, неправилните дропки запиши ги како мешани броеви.

а) $\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{9}$ **б)** $\frac{4}{7} \cdot \frac{7}{9}$ **в)** $\frac{8}{9} \cdot \frac{3}{5}$ **г)** $\frac{6}{11} \cdot \frac{4}{9}$

3. Пресметај. Решенијата запиши ги како нескратливи дропки.

Во решенијата, неправилните дропки запиши ги како мешани броеви.

а) $1\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{5}$ **б)** $2\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{7}$ **в)** $\frac{25}{32} \cdot 3\frac{1}{5}$ **г)** $1\frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3}$

д) $1\frac{7}{9} \cdot \frac{3}{8}$ **ѓ)** $\frac{4}{5} \cdot 2\frac{1}{12}$ **е)** $\frac{2}{5} \cdot 1\frac{7}{8}$ **ж)** $2\frac{1}{10} \cdot \frac{5}{7}$

з) $1\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{10}$ **ѕ)** $1\frac{1}{9} \cdot 2\frac{2}{5}$ **и)** $1\frac{7}{8} \cdot 1\frac{1}{5}$ **ј)** $2\frac{2}{3} \cdot 2\frac{1}{4}$

к) $2\frac{2}{9} \cdot \frac{6}{25}$ **л)** $1\frac{1}{10} \cdot 1\frac{11}{25}$ **љ)** $4\frac{1}{6} \cdot 1\frac{13}{35}$ **м)** $1\frac{11}{12} \cdot 1\frac{1}{5}$

4. Лејла патува 24 km до работа секој ден.

Таа вози велосипед $\frac{3}{5}$ од патот, а потоа продолжува пеш.

За колку km е поголем патот изминат со велосипед отколку патот поминат пеш?

5. Во една кутија има 6 идентични книги со меки корици, секоја со маса $\frac{3}{10}$ kg, и 5 идентични книги со тврди корици, секоја со маса $\frac{4}{5}$ kg. Празната кутија има маса $2\frac{3}{8}$ kg. Колкава е вкупната маса на кутијата со сите книги во неа?

Пресметај ја вкупната маса на книгите со тврди корици и вкупната маса на книгите со меки корици.

6. Пресметај. Решенијата запиши ги како нескратливи дропки.

Во решенијата, неправилните дропки запиши ги како мешани броеви.

а) $1\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2\frac{1}{2}$ **б)** $2\frac{1}{4} \cdot 2\frac{1}{3} \cdot 2\frac{2}{3}$

1.7 Делење дропки

Делење цел број со дропка

Цел број делиме со дропка така што бројот го множиме со нејзината реципрочна дропка. Реципрочна дропка е дропката во која броителот и имеителот ќе ги заменат местата, односно дропката „ќе ја превертиме наопаку".

Пример 1

Пресметај: $4 : \frac{2}{3}$

$$4 : \frac{2}{3} = {}^{2}\!\!\not{4} \cdot \frac{3}{\not{2}_{1}} \qquad \frac{3}{2} \text{ е реципрочна дропка на } \frac{2}{3}$$
$$= \frac{6}{1}$$
$$= 6$$

Делење дропка со дропка

Една дропка делиме со друга дропка така што првата дропка ја множиме со реципрочната вредност на втората дропка.

Да запомниме дека пред делењето мешаните броеви треба да ги запишеме како дропки.

Пример 2

Пресметај: $2\frac{6}{7} : 1\frac{1}{4}$

$$2\frac{6}{7} : 1\frac{1}{4} = \frac{20}{7} : \frac{5}{4}$$
$$= {}^{4}\!\!\not{20} \cdot \frac{4}{\not{5}_{1}} \qquad \frac{4}{5} \text{ е реципрочна дропка на } \frac{5}{4}$$
$$= \frac{16}{7}$$
$$= 2\frac{2}{7}$$

Задачи

1. Пресметај.

а) $4 : \frac{1}{2}$ **б)** $3 : \frac{3}{4}$ **в)** $6 : \frac{3}{8}$ **г)** $8 : \frac{2}{5}$

2. Пресметај. Решенијата запиши ги како нескратливи дропки.

Во решенијата, неправилните дропки запиши ги како мешани броеви.

а) $\frac{4}{5} : \frac{2}{3}$ **б)** $\frac{7}{10} : \frac{3}{5}$ **в)** $\frac{12}{19} : \frac{6}{7}$ **г)** $\frac{16}{25} : \frac{8}{15}$

3. Пресметај. Решенијата запиши ги како нескратливи дропки.

Во решенијата, неправилните дропки запиши ги како мешани броеви.

а) $1\frac{7}{9} : 2\frac{2}{3}$ **б)** $\frac{8}{15} : \frac{24}{25}$ **в)** $\frac{5}{18} : 2\frac{1}{12}$ **г)** $1\frac{1}{15} : 1\frac{3}{5}$

д) $1\frac{7}{8} : 2\frac{1}{4}$ **ѓ)** $1\frac{1}{8} : 1\frac{1}{2}$ **е)** $1\frac{1}{20} : 2\frac{4}{5}$ **ж)** $1\frac{7}{8} : \frac{3}{4}$

з) $3\frac{3}{5} : \frac{9}{10}$ **ѕ)** $\frac{4}{9} : 2\frac{2}{3}$ **и)** $2\frac{1}{10} : 2\frac{4}{5}$ **ј)** $2\frac{2}{5} : \frac{8}{15}$

к) $2\frac{1}{4} : \frac{3}{10}$ **л)** $1\frac{7}{8} : \frac{5}{12}$ **љ)** $2\frac{2}{3} : 2\frac{2}{9}$ **м)** $1\frac{11}{25} : 1\frac{1}{15}$

4. Една празна кутија има маса $3\frac{3}{8}$ kg.

Едно парче алат има маса $1\frac{1}{8}$ kg.

Масата на кутијата треба да ја вклучиш само еднаш.

Кутијата може да носи вкупна маса, вклучувајќи ја содржината, помала од 25 kg.

Колкав е најголемиот број алати што можат да се стават во кутијата?

5. Пресметај. Упрости ги одговорите колку што е тоа можно.

а) $2\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{9} : 1\frac{3}{5}$ **б)** $1\frac{5}{9} \cdot \frac{5}{7} : 1\frac{1}{24}$

6. Во една кутија има 20 идентични колачиња.

Празната кутија има маса $12\frac{1}{2}$ g.

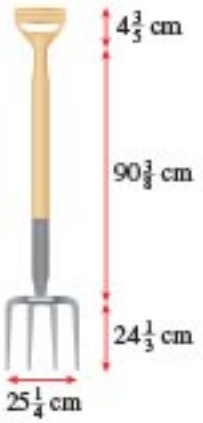
Секое колаче има маса $5\frac{2}{5}$ g.

Колкава е вкупната маса на кутијата со колачите во неа?

7. На цртежот е прикажана градинарска вила.

а) Колкава е вкупната должина на вилата?

б) Колкаво е растојанието помеѓу краевите на соседните запци?



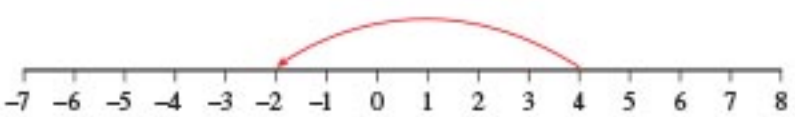
1.8 Позитивни и негативни броеви

Собирање и одземање

Позитивните и негативните броеви ги прикажуваме на бројната оска, така што лево од нулата се негативните броеви, а десно од неа се позитивните броеви.

Бројната оска можеме да ја користиме за собирање и за одземање позитивни и негативни броеви.

На цртежот е прикажан збирот (+4) + (−6)



Црвената стрелка покажува дека почнуваме од +4 и се движиме 6 чекори налево.

За мали цели броеви можеме да ја користиме бројната оска.

За другите броеви ги користиме следните правила за ослободување од загради:

+ + се заменува со +	на пример, −4 + (+6) се заменува со −4 + 6 = +2
+ − се заменува со −	на пример, −4 + (−6) се заменува со −4 − 6 = −10
− + се заменува со −	на пример, −4 − (+6) се заменува со −4 − 6 = −10
− − се заменува со +	на пример, −4 − (−6) се заменува со −4 + 6 = +2

Пример 1

Пресметај.

а) (+7,5) − (+12,2) **б)** (−8,1) + (+14,8)

в) (−23,5) − (−17,8)

а) (+7,5) − (+12,2)

= +7,5 − 12,2 − + еднакво на −

Децималните броеви потешко можеме да ги собираме на бројната оска.



Наместо тоа, изразот 7,5 − 12,2 го запишуваме со неговите спротивни броеви, 12,2 − 7,5.

Калкулаторот го користиме само ако работиме со многу големи броеви.

12,2 − 7,5 = 4,7

Според тоа, 7,5 − 12,2 = −4,7

12,2
− 7,5
4,7

б) (−8,1) + (+14,8)

= −8,1 + 14,8 + + е еднакво на +

= 14,8 − 8,1

= 6,7

в) (−23,5) − (−17,8)

= −23,5 + 17,8 − − е еднакво на +

= − (23,5 − 17,8) Користиме инверзна операција

= −5,7

Множење и делење

Правила за множење и за делење позитивни и негативни броеви:

позитивен и позитивен = позитивен

позитивен и негативен = негативен

негативен и позитивен = негативен

негативен и негативен = позитивен

Правилата кратко ги запишуваме:

+ + ќе се добие +
+ − ќе се добие −
− + ќе се добие −
− − ќе се добие +

Основното правило е исто за множењето и за делењето.
Ако двата знака се исти, тогаш резултатот ќе биде позитивен.
Ако двата знака се различни, тогаш резултатот ќе биде негативен.

Пример 2

Пресметај: **а)** $-7 \cdot (+12)$ **б)** $-23{,}6 \cdot (-9)$ **в)** $(-63) : 9$ **г)** $220{,}8 : (-12)$

а) Знаците се различни, па резултатот ќе биде негативен.
Знаеме дека $7 \cdot 12 = 84$.
Затоа $-7 \cdot 12 = -84$.

б) Знаците се еднакви, па резултатот ќе биде позитивен.
Пресметуваме $23{,}6 \cdot 9 = 212{,}4$.
Затоа, $-23{,}6 \cdot (-9) = 212{,}4$.

$$\begin{array}{r} 23{,}6 \\ \cdot\ \ 9 \\ \hline 212{,}4 \\ \hline 5\ 5 \end{array}$$

в) Знаците се различни, па резултатот ќе биде негативен.
Знаеме дека $63 : 9 = 7$.
Затоа, $-63 : 9 = -7$.

г) Знаците се различни, па резултатот ќе биде негативен.
Пресметуваме $220{,}8 : 12 = 18{,}4$.
Затоа, $220{,}8 : (-12) = -18{,}4$.

$$\begin{array}{r} 220{,}8 : 12 = 18{,}4 \\ -12 \\ \hline 100 \\ -96 \\ \hline 48 \\ -48 \\ \hline 0 \end{array}$$

Пример 3

Пресметај: **а)** $(-4)\cdot(+8)\cdot(-10)$ **б)** $(-6)^2$

а) Кога во изразот има повеќе од два броја, тогаш треба да пресметуваме според редоследот на запишување.

За полесно, можеме да запишуваме во загради.

$(-4)\cdot(+8)\cdot(-10)$

$=((-4)\cdot(+8))\cdot(-10)$

$=(-32)\cdot(-10)$

$=320$

Ако имаме парен број негативни знаци, резултатот ќе биде позитивен.

Ако имаме непарен број негативни знаци, резултатот ќе биде негативен.

б) $(-6)^2=(-6)\cdot(-6)=36$

Кога квадрираме негативен број, резултатот е позитивен.

Задачи

Пресметај:

1. $(-2{,}5)+(+8{,}5)$ **2.** $3+(-9)$ **3.** $(-6{,}4)-(+9)$

4. $6{,}2-(-8{,}5)$ **5.** $(-13)+(-14)$ **6.** $(-8)+(+28)$

7. $(-5{,}8)-(-7{,}8)$ **8.** $0{,}5+(+1{,}5)$ **9.** $(-3{,}9)+(+4{,}9)$

10. $(-5{,}2)+(-4{,}8)$ **11.** $7{,}6-(+5{,}3)$ **12.** $3-(+13{,}6)$

13. $15{,}3+(-12{,}2)$ **14.** $(-12{,}8)-(+13{,}8)$ **15.** $(-21)-(-26{,}9)$

16. $(-13{,}7)+(-16{,}8)$ **17.** $-9\cdot(+8)$ **18.** $-7\cdot(-6)$

19. $+9{,}2\cdot(-5)$ **20.** $-4{,}3\cdot(-8)$ **21.** $+16{,}3\cdot(+5)$

22. $-17{,}2\cdot(+3)$ **23.** $+25{,}8\cdot(-2)$ **24.** $-16{,}4\cdot(-10)$

25. $-72:8$ **26.** $-48:(-6)$ **27.** $128:(-8)$

28. $-354:(-6)$ **29.** $18{,}7:(-11)$ **30.** $-650:(-10)$

31. $-65{,}1:7$ **32.** $-89{,}5:(-5)$ **33.** $(-3)^2$

34. $(-8)^2$ **35.** $(-10)^2$ **36.** $-5\cdot(-4)\cdot 6$

37. $-4\cdot(-2)\cdot(-7)$ **38.** $9\cdot(-3)\cdot(-10)$ **39.** $-3\cdot 8\cdot(-4)\cdot(-10)$

40. $(-2)^3$ $(-2)^3=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)$

Задачи за повторување

1. Заокружи ги броевите на даденият број децимални места.

а) 2,58 на 1 д.м. **б)** 2,68961 на 2 д.м. **в)** 2,089 на 1 д.м.

г) 8,99 на 1 д.м. **д)** 2,034 на 1 д.м.

2. Заокружи ги броевите според даденият број значајни цифри.

а) 458 на 2 з.ц. **б)** 2,35841 на 3 з.ц. **в)** 0,0258 на 1 з.ц.

г) 99,8 на 2 з.ц. **д)** 99,8 на 1 з.ц.

3. Пресметај.

а) $60 \cdot 300$ **б)** $5000 \cdot 20$ **в)** $300 \cdot 0{,}8$ **г)** $250 \cdot 0{,}2$

д) $0{,}35 \cdot 0{,}2$ **ѓ)** $0{,}08 \cdot 0{,}04$ **е)** $0{,}24 \cdot 0{,}6$ **ж)** $6000 \cdot 0{,}09$

4. Упрости ги изразите во вид на степен.

а) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$ **б)** $12 \cdot 12 \cdot 12$ **в)** $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3$

г) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$

5. Упрости ги изразите. Решенијата запиши ги во вид на степен.

а) $4^2 \cdot 4^4$ **б)** $5^8 : 5^3$ **в)** $6^2 \cdot 6^4 \cdot 6$ **г)** $(10^2)^3$

д) $(5^3)^4$ **ѓ)** $x^4 \cdot x^3 : x$ **е)** $y^5 : y^3 \cdot y^2$ **ж)** $x^4 \cdot x^3 : x^{-1}$

6. Упрости ги изразите и потоа пресметај ја нивната вредност.

а) $8^{-5} \cdot 8^7$ **б)** $(5^2)^3 : 5^4$ **в)** $9 : 3^2$ **г)** $16 \cdot 2^{-3}$

7. Пресметај.

а) $\frac{2}{0{,}4}$ **б)** $\frac{16}{0{,}8}$ **в)** $\frac{14{,}4}{0{,}9}$ **г)** $\frac{1{,}8}{0{,}6}$ **д)** $\frac{6{,}3}{0{,}07}$

ѓ) $\frac{1{,}5}{0{,}01}$ **е)** $\frac{0{,}8}{0{,}02}$ **ж)** $\frac{0{,}18}{0{,}03}$ **з)** $3 : 0{,}1$ **ѕ)** $20 : 0{,}01$

8. Пресметај.

а) $4{,}5 \cdot 10^2$ **б)** $450 \cdot 10^{-1}$ **в)** $508 \cdot 10^{-3}$ **г)** $0{,}0054 \cdot 10^3$

д) $0{,}0492 \cdot 10^{-1}$ **ѓ)** $42 : 10^2$ **е)** $589 : 10^1$ **ж)** $0{,}05 : 10^{-3}$

з) $0{,}0089 : 10^{-2}$ **ѕ)** $0{,}025 : 10^{-3}$

9. Одреди ја вредноста на:

а) 6^2 **б)** $(-8)^2$ **в)** 15^2 **г)** $(-17)^2$

д) 1^8 **ѓ)** 12^0 **е)** 5^{-2} **ж)** 6^{-1}

10. Пресметај. Решенијата запиши ги како нескратливи дропки.

а) $\frac{13}{20} + \frac{11}{18}$ **б)** $\frac{5}{12} - \frac{3}{20}$ **в)** $3\frac{25}{32} + 4\frac{7}{24}$ **г)** $4\frac{7}{27} - 2\frac{11}{18}$

11. Елена пешачела $\frac{4}{5}$ km до автобуската станица.

Потоа се возела $4\frac{2}{3}$ km со автобус.

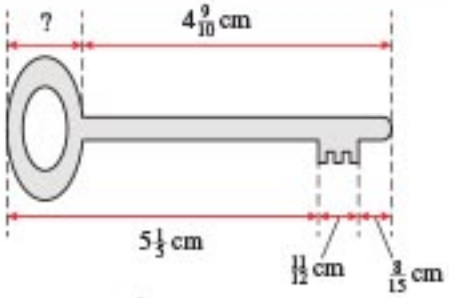
На крај, таа пешачела $\frac{7}{12}$ km до училиштето.

Колку вкупно километри патувала Елена?

12. Употреби ги должините прикажани на сликата за да ја најдеш:

а) вкупната должина на клучот

б) должината на „главата“ на клучот.



13. Пресметај. Решенијата запиши ги како нескратливи дропки.

Во решенијата, неправилни дропки запиши ги како мешани броеви.

а) $\frac{4}{15} \cdot \frac{9}{16}$ **б)** $\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8}$ **в)** $\frac{4}{25} \cdot \frac{15}{16}$

г) $2\frac{7}{10} \cdot 2\frac{7}{9}$ **д)** $4\frac{2}{3} \cdot 2\frac{1}{28}$ **ѓ)** $2\frac{2}{9} \cdot 1\frac{11}{25}$

14. Пресметај. Решенијата запиши ги како нескратливи дропки.

Во решенијата, неправилните дропки запиши ги како мешани броеви.

а) $1\frac{3}{8} : \frac{1}{4}$ **б)** $\frac{4}{5} : \frac{3}{10}$ **в)** $\frac{7}{8} : \frac{5}{12}$

г) $4\frac{2}{3} : \frac{7}{9}$ **д)** $2\frac{5}{8} : 1\frac{5}{16}$ **ѓ)** $1\frac{1}{6} : 2\frac{1}{3}$

2 Алгебра и решавање проблеми

Наставни цели

- Го знае потеклото на зборот „алгебра" и неговата поврзаност со арапскиот математичар Ал Кваризми.
- Користи запишување на степени со степенов показател позитивен цел број; применува правила за множење и делење на степени во трансформирање на алгебарски изрази.
- Поедноставува или трансформира алгебарски изрази преку извлекување на моном како заеднички множител.
- Собира и одзема едноставни алгебарски дропки.
- Составува и решава линеарни равенки со коефициенти цели броеви (со или без загради, негативни знаци во равенката, позитивни или негативни решенија); решава проблем со броеви со составување и решавање на линеарна равенка.
- Составува алгебарски изрази.
- Наоѓа инверзна функција на линеарна функција.
- Генерира членови на низа со користење на правилото за одредување на следен член и одредување на кој било член од низата, користејќи го општиот член.
- Изведува израз за да го опише n-тиот член на аритметичка низа.

Ал Кваризми

Мухамед ибн Муса ал Хваризми е познат арапски математичар роден околу 783 година.

Тој напишал многу книги. Во книгата со наслов „Прирачник за пресметки и метод на рамнотежа" тој го користи зборот „ал-хабра" што значи одземање број од двете страни на една равенка.

Од зборот „ал-хабра" потекнува и зборот „алгебра" што ние го користиме денес.

Единствената арапска копија на оваа книга се чува во Оксфорд, а нејзиниот превод на латински јазик се чува во Кембриџ.

На сликата е претставена поштенска марка на која го пишува неговото име и текстот „1200 години". Таа била произведена во 1983 година по повод 1200 години од неговото раѓање.



2.1 Упростување степени

Можеме да го запишеме $a \cdot a \cdot a \cdot a$ како a^4 ← степенов показател (експонент); ← основа

и $y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y$ како y^7

$3x \cdot 2x \cdot 5x$ како $3 \cdot x \cdot 2 \cdot x \cdot 5 \cdot x = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot x$

$= 30 \cdot x^3$

$= 30x^3$

$\frac{2x}{6}$ можеме да го запишеме како $\frac{2 \cdot x}{2 \cdot 3}$ што може да се упрости до $\frac{x}{3}$

Пример 1

Упрости ги изразите: **а)** $5a \cdot a \cdot 2a$ **б)** $2x \cdot 3y \cdot x \cdot 4y$

а) $5a \cdot a \cdot 2a = 5 \cdot a \cdot a \cdot 2 \cdot a$

$= 5 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot a$

$= 10a^3$

б) $2x \cdot 3y \cdot x \cdot 4y = 2 \cdot x \cdot 3 \cdot y \cdot x \cdot 4 \cdot y$

$= 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y$

$= 24x^2y^2$

Пример 2

Упрости ги изразите: **а)** $\frac{12x}{3y}$ **б)** $\frac{5x^2}{10xy}$

а) $\frac{12x}{3y} = \frac{3 \cdot 4 \cdot x}{3 \cdot y}$ Ги делиме броителот и именителот со 3.

$= \frac{4x}{y}$

б) $\frac{5x^2}{10xy} = \frac{5 \cdot x \cdot x}{2 \cdot 5 \cdot x \cdot y}$ Ги делиме броителот и именителот со 5 и со x.

$= \frac{x}{2y}$

Задачи

1. Упрости:

а) $3x \cdot 4x$ **б)** $5x \cdot x$ **в)** $2y \cdot y \cdot 3y$

г) $2a \cdot 3a \cdot 4a$ **д)** $2b \cdot 3b \cdot b \cdot 4b \cdot b$ **ѓ)** $4p \cdot p \cdot 3p \cdot p \cdot p$

2. Упрости:

а) $5a \cdot a \cdot 2b$ **б)** $2p \cdot 3q \cdot p \cdot 4q \cdot p$ **в)** $7x \cdot 3y \cdot 2x$

г) $2x \cdot 3y \cdot 4y \cdot 5x$ **д)** $6a \cdot b \cdot a \cdot 7ab$ **ѓ)** $x \cdot 8xy \cdot 2xy \cdot 3x$

3. Упрости:

а) $\frac{5x}{10}$ **б)** $\frac{6y}{8}$ **в)** $\frac{8a}{12}$ **г)** $\frac{14x}{21}$ **д)** $\frac{6x}{4}$

ѓ) $\frac{5x}{x^2}$ **е)** $\frac{3x^2}{12x}$ **ж)** $\frac{12xy}{8x}$ **з)** $\frac{6y}{y^2}$ **ѕ)** $\frac{2xy}{y^2}$

и) $\frac{7x}{14y}$ **ј)** $\frac{9xy}{3xyz}$ **к)** $\frac{8ab^2}{b}$ **л)** $\frac{2xy}{6x^2y^2}$ **љ)** $\frac{2a^2b}{5ab^2}$

4. Запиши ги броевите како степени со основа 2, односно во вид 2^x. (На пример, $16 = 2^4$)

а) 32 **б)** 8 **в)** 4 **г)** 64 **д)** 256

5. Запиши ги броевите во вид x^y. (На пример, $125 = 5^3$)

а) 49 **б)** 27 **в)** 10000 **г)** 169 **д)** 243

6. Реши ги равенките.

Првата равенка е решена како пример.

а) $2^x = 8$ Запиши го 8 како степен со основа 2.

$2^x = 2^3$ Основите се еднакви, па и степеновите показатели мораат да бидат еднакви.

$x = 3$

б) $2^x = 64$ **в)** $3^x = 9$ **г)** $10^x = 100$ **д)** $5^x = 125$ **ѓ)** $2^x = 256$

е) $4^x = 64$ **ж)** $2^x = 512$ **з)** $3^x = 27$ **ѕ)** $2^x = 16$ **и)** $3^x = 81$

7. Реши ги равенките.

Првата равенка е решена како пример.

а) $5^{x+1} = 125$ Запиши го 125 како степен со основа 5.

$5^{x+1} = 5^3$ Основите се еднакви, па и степеновите показатели мораат да бидат еднакви.

$x + 1 = 3$ Одземи 1 од двете страни.

$x = 2$

б) $2^{2x} = 64$ **в)** $2^{x+1} = 16$ **г)** $2^{x-1} = 8$ **д)** $5^{x-2} = 125$ **ѓ)** $3^{x-1} = 81$

е) $2^{x-2} = 128$ **ж)** $2^{2x+1} = 32$ **з)** $5^{x-1} = 125$ **ѕ)** $3^{2x+1} = 27$ **и)** $10^{3x} = 1000000$

2.2 Правила за операции со степени со еднакви основи

Следните три правила се познати како правила за операции со степени со еднакви основи.

Множење степени со еднакви основи

Да го разгледаме производот $2^5 \cdot 2^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^8$

Ако го поврземе почетокот и крајот на равенството добиваме: $2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$

ПРАВИЛО 1 $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$

Делење степени со еднакви основи

Да го разгледаме делењето $4^5 : 4^3 = \frac{\cancel{4}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{4}\cdot 4\cdot 4}{\cancel{4}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{4}} = 4^2$

Ако го повземе почетокот и крајот на равенството добиваме: $4^5 : 4^3 = 4^{5-3} = 4^2$

ПРАВИЛО 2 $x^a : x^b = x^{a-b}$

Степенување степен

Да го разгледаме степенот: $(5^2)^3 = (5\cdot 5)\cdot(5\cdot 5)\cdot(5\cdot 5) = 5^6$

Ако го повземе почетокот и крајот на равенството добиваме. $(5^2)^3 = 5^{2\cdot 3} = 5^6$

ПРАВИЛО 3 $(x^a)^b = x^{a\cdot b}$

Пример 1

Упрости: **а)** $y^3 \cdot y^4$ **б)** $a^8 : a^3$ **в)** $(f^3)^4$

а) $y^3 \cdot y^4 = y^{3+4}$ Ги собираме степеновите показатели.
$= y^7$

б) $a^8 : a^3 = a^{8-3}$ Ги одземаме степеновите показатели.
$= a^5$

в) $(f^3)^4 = f^{3\cdot 4}$ Ги множиме степеновите показатели.
$= f^{12}$

Пример 2

Упрости: **а)** $5xy^2 \cdot 2x^2y^5 \cdot 7x^3y^4$ **б)** $\frac{2x^7y^8}{6x^3y^2}$

а) $5xy^2 \cdot 2x^2y^5 \cdot 7x^3y^4 = 5\cdot 2\cdot 7\cdot x^1\cdot x^2\cdot x^3\cdot y^2\cdot y^5\cdot y^4$
$= 70\cdot x^{1+2+3}\cdot y^{2+5+4}$
$= 70x^6y^{11}$

б) $\frac{2x^7y^8}{6x^3y^2} = \frac{2}{6}\cdot(x^7 : x^3)\cdot(y^8 : y^2)$
$= \frac{1}{3}\cdot x^{7-3}\cdot y^{8-2}$
$= \frac{x^4y^6}{3}$

Задачи

Упрости ги изразите.

1. а) $x^3 \cdot x^2$ **б)** $y^2 \cdot y^4$ **в)** $a^5 \cdot a$ **г)** $p^4 \cdot p^7$

д) $f \cdot f^3$ **ѓ)** $y^3 \cdot y^3$ **е)** $q^6 \cdot q^3$ **ж)** $d^4 \cdot d^8$

2. а) $2x^3 \cdot 3x^4$ б) $4y^5 \cdot 2y^3$ в) $3a^4 \cdot 5a^2$ г) $4f^2 \cdot f^5$

д) $5y^3 \cdot 5y^3$ ѓ) $4d \cdot 3d^5$ е) $7e^8 \cdot 4e^6$ ж) $9c^4 \cdot 4c^9$

3. а) $x^3 \cdot x^5 \cdot x^7$ б) $y^6 \cdot y \cdot y^2$ в) $2a^3 \cdot 5a^2 \cdot 3a^4$ г) $8d^4 \cdot d \cdot 2d^7$

4. а) $x^7 : x^2$ б) $x^8 : x^4$ в) $a^8 : a^5$ г) $p^6 : p$

5. а) $\frac{16x^7}{4x^5}$ б) $\frac{8x^6}{16x^2}$ в) $\frac{3a^5}{12a^2}$ г) $\frac{2y^8}{8y^2}$

д) $\frac{5y^7}{15y^4}$ ѓ) $\frac{12w^6}{18w^2}$ е) $\frac{25a^8}{50a^3}$ ж) $\frac{18g^5}{27g^2}$

6. а) $\frac{x^4 \cdot x^3}{x^5}$ б) $\frac{y^8 \cdot y^8}{y^7}$ в) $\frac{x^{10}}{x^2 \cdot x^4}$ г) $\frac{a^4 \cdot a^7}{a^2 \cdot a^3}$

д) $\frac{2x^2 \cdot 3x^5}{4x^3}$ ѓ) $\frac{3y^4 \cdot 6y^3}{2y^5}$ е) $\frac{8x^9}{2x^3 \cdot 2x^4}$ ж) $\frac{2a^5 \cdot 5a^2}{3a \cdot 4a^4}$

7. а) $(y^3)^2$ б) $(x^4)^3$ в) $(x^2)^6$ г) $(a^4)^4$ $(y^3)^2$ значи $y^3 \cdot y^3$

8. а) $(2x^3)^2$ б) $(3a^2)^4$ в) $(10y^4)^3$ г) $\left(\frac{h^3}{2}\right)^2$ $(2x^3)^2$ значи $2x^3 \cdot 2x^3$

2.3 Разложување на множители

Во VIII одделение ја учевме постапката за **ослободување од загради.**

Тоа значи дека изразот $2(x + 5)$ можеме да го запишеме како $2x + 10$.

Ова можеме да го објасниме на два различни начина.

Прв начин

Со цртеж.

Плоштината на правоаголникот со страни 2 и $x + 5$ може да се најде со поделба на правоаголникот на два дела како што е прикажано на цртежот.



Според тоа, $2(x + 5) = 2x + 10$.

Втор начин

Со множење.

$2(x + 5) = 2 \cdot x + 2 \cdot 5$ ← Секој член во заградите се множи со 2.

$= 2x + 10$

Разложувањето на множители е инверзна постапка на постапката на ослободувањето од загради. Со оваа постапка треба сите заеднички множители на членовите во заградата да ги извлечеме пред заградата. Според тоа, изразот $2x + 10$ го запишуваме како $2(x + 5)$.

Кога треба да разложиме на множители еден израз, важно е целосно да го разложиме на множители.

На пример, $12x + 8 = 2(6x + 4)$ е само делумно разложување на множители.

Со целосно разложување добиваме $12x + 8 = 4(3x + 2)$.

Пример

Разложи ги на множители изразите: **а)** $30x + 12$ **б)** $3x^2 - 9xy$ **в)** $6xy^2 + 8x^2y^3$

а) $30x + 12$
$= 6(5x + 2)$

6 е најголемиот заеднички делител (НЗД) на двата члена.
$30x = 6 \cdot 5x$ и $12 = 6 \cdot 2$.
Треба да го провериме резултатот преку ослободување од загради.
проверка: $6(5x + 2) = 6 \cdot 5x + 6 \cdot 2 = 30x + 12$.

б) $3x^2 - 9xy$
$= 3x(x - 3y)$

3 е НЗД на двата члена.
$3x^2 = 3x \cdot x$ и $9xy = 3x \cdot 3y$.
проверка: $3x(x - 3y) = 3x \cdot x - 3x \cdot 3y = 3x^2 - 9xy$.

в) $6xy^2 + 8x^2y^3$
$= 2xy^2(3 + 4xy)$

$2xy^2$ е НЗД на двата члена.
$6xy^2 = 2xy^2 \cdot 3$ и $8x^2y^3 = 2xy^2 \cdot 4xy$.
проверка: $2xy^2(3 + 4xy) = 2xy^2 \cdot 3 + 2xy^2 \cdot 4xy = 6xy^2 + 8x^2y^3$.

Задачи

1. Ослободи се од заградите во изразите.

а) $8(x + 7)$ **б)** $3(5 - y)$ **в)** $7(9y - 2)$ **г)** $x(x - 2)$

д) $y(3y + 8)$ **ѓ)** $2x(5 - 4x)$ **е)** $2xy(3 - y)$ **ж)** $5x^2(3 - 2x)$

2. Препиши и дополни.

а) $8x + 10 = 2(4x + \square)$ **б)** $6x - 9 = 3(2x - \square)$ **в)** $21x + 14 = 7(3x + \square)$

г) $18x + 27 = 9(\square + 3)$ **д)** $24y + 40 = \square(3y + \square)$ **ѓ)** $54 - 42x = \square(9 - \square)$

3. Во домашната работа Андреа требало да разложи на множители неколку изрази. Таа направила неколку грешки.

а) $12y - 8 = 4(3y - 4)$

б) $30x + 15 = 5(6x + 3)$

в) $4x - 10 = 4(x - 2{,}5)$

Препиши ги задачите и поправи ги нејзините грешки.

Во задачите **4**, **5**, **6**, **7** и **8** разложи ги на множители изразите.

4. **а)** $3x+6$ **б)** $7y-14$ **в)** $8x+24$ **г)** $9y+12$

д) $3x-15$ **ѓ)** $16y-12$ **е)** $30x+14$ **ж)** $20-16x$

з) $42+21y$ **ѕ)** $60-45x$ **и)** $38-19y$ **ј)** $144-108x$

5. **а)** x^2+4x **б)** y^2-5y **в)** x^2-10x **г)** $2a^2-4a$

д) x^2+9x **ѓ)** $8x-3x^2$ **е)** $10y-2y^2$ **ж)** $16x-12x^2$

з) $14x-7x^2$ **ѕ)** $6x+4x^2$ **и)** $12y^2-9y$ **ј)** $72x^2-54x$

6. **а)** $6\pi+2$ **б)** $24-16\pi$ **в)** $\pi r+2r$ **г)** $\pi r^2+2\pi rh$

7. **а)** $2x+4y+6z$ **б)** $9x^2+6x+3$ **в)** $8a-12b+30c$ **г)** $12x^3+6x^2-3x$

8. **а)** $xy+x^2$ **б)** $2x^2+6xy$ **в)** $8x^2y-4xy$ **г)** $10x^3y^2-15x^3y$

д) $16xy^3-24x^3y$ **ѓ)** $24a^2b+16ab$ **е)** $45x^5y-54x^2y$ **ж)** $8x^6y^4-6x^5y^2$

9. Алгебарските дропки можеме да ги упростиме со разложување на множители на броителот и на именителот, а потоа со скратување на заедничките делители на броителот и именителот.

На пример,

$$\frac{6x+18}{24} = \frac{6\cdot(x+3)}{6\cdot 4} = \frac{x+3}{4} \qquad \text{и} \qquad \frac{x^2-2x}{xy} = \frac{x\cdot(x-2)}{x\cdot y} = \frac{x-2}{y}$$

Упрости ги дадените дропки.

а) $\frac{4x+2}{10}$ **б)** $\frac{9x-6}{12}$ **в)** $\frac{6x+12}{8}$ **г)** $\frac{24-16y}{20}$

д) $\frac{5a+5b}{5c}$ **ѓ)** $\frac{8x-4y}{16z}$ **е)** $\frac{3x+3}{x^2+x}$ **ж)** $\frac{5x}{x^2-5x}$

2.4 Собирање и одземање алгебарски дропки

Правилата за собирање и за одземање алгебарски дропки се исти како и правилата за собирање и одземање бројни дропки.

Случај 1

Именителите на дропките се еднакви:

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{5}{7}$$

Слично, $\frac{2x}{7}+\frac{3x}{7}=\frac{5x}{7}$.

Случај 2

Именителите на дропките се различни:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{8}{12}+\frac{3}{12}$$
$$=\frac{11}{12}$$

Слично, $\frac{2x}{3}+\frac{x}{4}=\frac{8x}{12}+\frac{3x}{12}$
$$=\frac{11x}{12}$$

Мораме да ги сведеме дропките на ист заеднички именител (НЗС). Во овој случај тоа е 12.

Пример

Запиши ги следните изрази како една дропка.

а) $\frac{9}{y}-\frac{2}{y}$ **б)** $\frac{5x}{4}-\frac{2x}{5}$ **в)** $\frac{2}{3x}+\frac{1}{6x}$ **г)** $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}$

а) $\frac{9}{y}-\frac{2}{y}=\frac{7}{y}$ Именителите се еднакви.

б) $\frac{5x}{4}-\frac{2x}{5}=\frac{25x}{20}-\frac{8x}{20}$
$$=\frac{17x}{20}$$
Мораме да ги сведеме дропките на ист именител, што во случајов е 20.

в) $\frac{2}{3x}+\frac{1}{6x}=\frac{4}{6x}+\frac{1}{6x}$
$$=\frac{5}{6x}$$
Мораме да ги сведеме дропките на ист именител, што во случајов е $6x$.

г) $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{3y}{xy}+\frac{2x}{xy}$
$$=\frac{3y+2x}{xy}$$
Мораме да ги сведеме дропките на ист именител, што во случајов е xy.

Задачи

1. Запиши ги следниве изрази како една дропка.

а) $\frac{x}{3}+\frac{x}{3}$ **б)** $\frac{2x}{5}+\frac{x}{5}$ **в)** $\frac{x}{7}+\frac{3x}{7}$ **г)** $\frac{x}{5}+\frac{1}{5}$ **д)** $\frac{2x}{9}+\frac{2x}{9}$

ѓ) $\frac{x}{8}-\frac{y}{8}$ **е)** $\frac{5x}{7}-\frac{2x}{7}$ **ж)** $\frac{x}{7}-\frac{2}{7}$ **з)** $\frac{5}{x}+\frac{2}{x}$ **ѕ)** $\frac{7}{y}-\frac{3}{y}$

и) $\frac{x}{y}+\frac{2}{y}$ **ј)** $\frac{a}{x}-\frac{b}{x}$ **к)** $\frac{x}{4}+\frac{x}{4}$ **л)** $\frac{5x}{6}-\frac{x}{6}$ **љ)** $\frac{8}{9xy}-\frac{2}{9xy}$

2. Теодора запишала:

$\frac{x}{8}+\frac{2x}{3}=\frac{3x}{11}$

Објасни каде згрешила и пресметај го точното решение.

3. Запиши ги следниве изрази како една дропка.

а) $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}$ **б)** $\frac{x}{4}+\frac{x}{5}$ **в)** $\frac{y}{3}-\frac{y}{4}$ **г)** $\frac{x}{2}+\frac{x}{8}$ **д)** $\frac{2x}{5}+\frac{x}{10}$

ѓ) $\frac{5x}{8}-\frac{x}{2}$ **е)** $\frac{2x}{5}-\frac{x}{4}$ **ж)** $\frac{5y}{7}-\frac{y}{2}$ **з)** $\frac{3x}{8}+\frac{x}{3}$ **ѕ)** $\frac{2y}{3}+\frac{y}{6}$

4. Одреди го изразот што се разликува од другите.

$\frac{x}{6}+\frac{5x}{12}$ $\frac{5x}{6}-\frac{x}{4}$ $\frac{x}{4}+\frac{x}{3}$ $\frac{x}{6}+\frac{3x}{4}$ $\frac{2x}{3}-\frac{x}{12}$

Изразите во задачите **5**, **6** и **7** запиши ги како една дропка.

5. а) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}$ б) $\frac{x}{3}+\frac{2x}{5}+\frac{x}{4}$ в) $\frac{x}{2}+\frac{x}{10}+\frac{2x}{5}$ г) $\frac{5x}{6}+\frac{x}{4}-\frac{2x}{3}$

6. а) $\frac{1}{2x}+\frac{3}{x}$ б) $\frac{2}{3y}+\frac{1}{y}$ в) $\frac{3}{4x}+\frac{1}{2x}$ г) $\frac{3}{xy}+\frac{2}{y}$

7. а) $\frac{x}{4}+\frac{x+1}{2}$ б) $\frac{x+2}{3}+\frac{x+7}{4}$ в) $\frac{x-8}{4}+\frac{x+2}{5}$ г) $\frac{x-4}{3}-\frac{x-5}{7}$

2.5 Решавање линеарни равенки

Да се потсетиме како се решаваат **равенки**.

Пример 1

Реши ја равенката: $\frac{x}{2}-4=12$

$\frac{x}{2}-4=12$ Додаваме 4 на двете страни.

$\frac{x}{2}=16$ Двете страни ги множиме со 2.

$x=32$

Пример 2

Реши ја равенката: $3(2x+5)=2(2x-7)+25$

$3(2x+5)=2(2x-7)+25$ Се ослободуваме од заградите.

$6x+15=4x-14+25$ Ги собираме сличните членови.

$6x+15=4x+11$ Одземаме $4x$ од двете страни.

$2x+15=11$ Одземаме 15 од двете страни.

$2x=-4$ Двете страни ги делиме со 2.

$x=-2$

За да ја решиме равенката $\frac{x+1}{4}=\frac{x+8}{5}$, прво мораат да ги помножиме двете страни од равенката со најмалиот заеднички содржател (НЗС) на 4 и 5, односно да помножиме со 20.

$20 \cdot \frac{(x+1)}{4} = 20 \cdot \frac{(x+8)}{5}$ — Скратуваме $20 : 4 = 5$ и $20 : 5 = 4$

$5(x+1) = 4(x+8)$ — Се слободуваме од заградите.

$5x + 5 = 4x + 32$ — Одземаме $4x$ од двете страни.

$x + 5 = 32$ — Одземаме 5 од двете страни.

$x = 27$

Ако на двете страни на равенството има по една дропка, тогаш можеме да користиме побрз начин.

$\frac{x+1}{4}=\frac{x+8}{5}$ — Множиме накрсно.

$5(x+1) = 4(x+8)$ — Се ослободуваме од заградите.

$5x + 5 = 4x + 32$ — Одземаме $4x$ од двете страни.

$x + 5 = 32$ — Одземаме 5 од двете страни.

$x = 27$

Задачи

1. Реши ги равенките.

а) $3x + 2 = 23$ **б)** $2x - 1 = -9$ **в)** $5x - 3 = 27$ **г)** $4x + 7 = 17$

д) $\frac{x+2}{5} = 4$ **ѓ)** $\frac{2x-3}{4} = -2$ **е)** $\frac{x}{3} - 2 = 2$ **ж)** $\frac{x}{5} + 6 = -2$

з) $15 - 2x = 9$ **ѕ)** $30 - 4x = 24$ **и)** $3(2x - 7) = -27$ **ј)** $2(5 - 2x) = 16$

2. Реши ги равенките.

а) $2(x + 3) + 4(2x - 1) = 22$ **б)** $3(2x - 2) + 5(x + 6) = 13$

в) $4(3x + 2) - 3(2x - 1) = 35$ **г)** $5(2x - 3) - 2(3x + 5) = -23$

д) $5x + 4 = 4x + 7$ **ѓ)** $7x - 2 = 5x + 5$

е) $8x + 1 = 5x - 8$ **ж)** $2x - 5 = 7 - x$

з) $3(x + 1) = 2x - 8$ **ѕ)** $2 + 4(x - 3) = 2x + 7$

и) $12 - 2x = 20 - 5x$ **ј)** $3(2x + 7) + 2 = 4(x - 8)$

3. Реши ги равенките.

а) $\frac{2x-5}{2}=\frac{x+1}{8}$ **б)** $\frac{x-1}{2}=\frac{2x+10}{12}$ **в)** $\frac{4x+7}{3}=\frac{8x+9}{5}$ **г)** $\frac{2x+2}{6}=\frac{x+5}{5}$

д) $\frac{3x-2}{7}=\frac{x-2}{3}$ **ѓ)** $\frac{4x-3}{9}=\frac{3x-4}{5}$ **е)** $\frac{2x+1}{2}=\frac{5x+7}{4}$ **ж)** $\frac{3x-8}{6}=\frac{x-2}{3}$

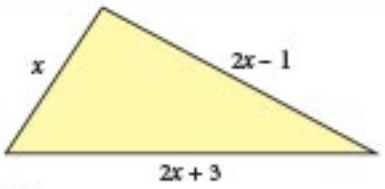
4. Амир замислил број.

Му додал 5, а потоа го поделил со 7.

Истиот резултат се добива ако одземе 1 од замисленият број и потоа подели со 4.

Кој е бројот што го замислил Амир?

5. Периметарот на даденият триаголник е 15 cm.



а) Запиши равенка по x, за пресметување на периметарот на триаголникот.

б) Реши ја равенката под **а)** за да ја најдеш вредноста на x.

6. Изразот А е за 7 помал од изразот Б.

А $25-2x$ Б $3(x+4)$

Пресметај ја вредноста на x.

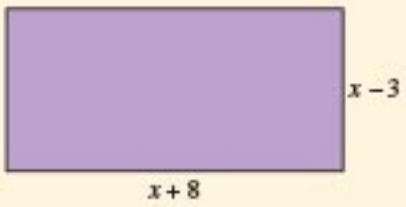
7. Реши ги равенките.

а) $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=14$ **б)** $\frac{2x}{3}-\frac{x}{5}=21$ **в)** $\frac{6x}{7}-\frac{x}{3}=22$ **г)** $\frac{2x}{9}-\frac{x}{2}=10$

2.6 Составување алгебарски изрази

Пример 1

Запиши израз со кој ќе ја пресметаш плоштината на правоаголникот.



плоштина = основа · соодветна висина

$= (x+8)(x-3)$

$= x^2-3x+8x-24$

$= x^2+5x-24$

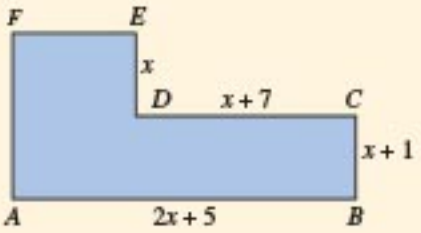
Пример 2

Според податоците на цртежот, запиши израз со кој ќе ги пресметаш:

а) должината на страната $\overline{EF}$

б) должината на страната $\overline{AF}$

в) периметарот на 2Д-формата $ABCDEF$.



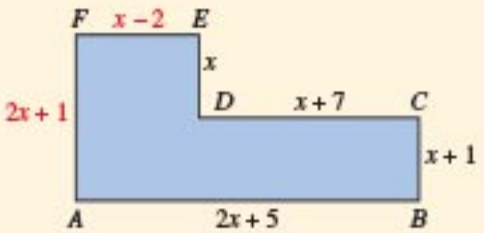
а) $\overline{EF}=\overline{AB}-\overline{DC}=(2x+5)-(x+7)$

$=2x+5-x-7$

$=x-2$

б) $\overline{AF}=\overline{BC}+\overline{DE}=x+1+x$

$=2x+1$



в) периметар $=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FA}$

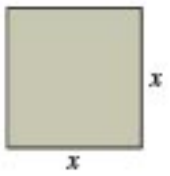
$=(2x+5)+(x+1)+(x+7)+x+(x-2)+(2x+1)$

$=8x+12$

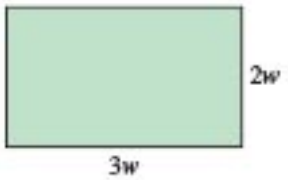
Задачи

1. Според податоците на цртежите, запиши изрази за периметарот на секоја од 2Д-формите. Упрости ги добиените изрази.

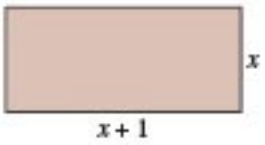
а)



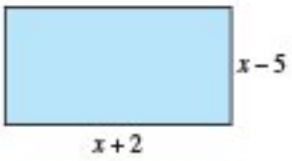
б)



в)

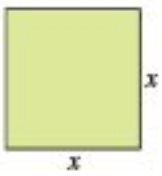


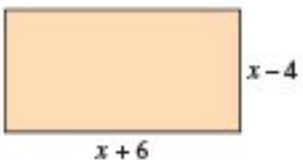
г)



2. Запиши изрази за плоштината на секоја од 2Д-формите од задача **1.** Упрости ги добиените изрази.

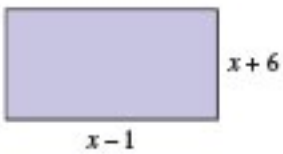
3.





Квадратот и правоаголникот имаат еднакви плоштини. Пресметај ја вредноста на x.

4.

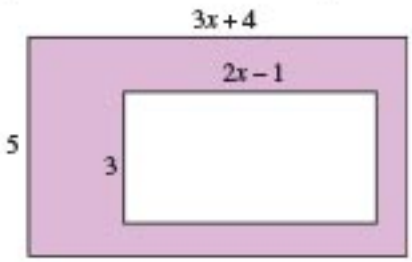




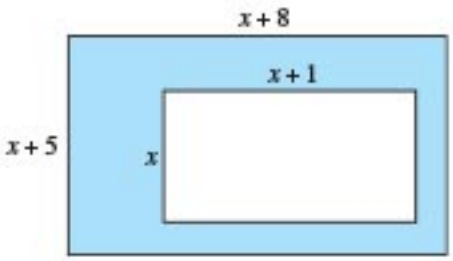
Запиши израз со кој ќе се пресмета вкупната плоштина на двата правоаголника. Упрости го добиениот израз.

5. Запиши израз за пресметување плоштина на обоената површина во дадените 2Д-форми. Упрости ги добиените изрази.

а)



б)



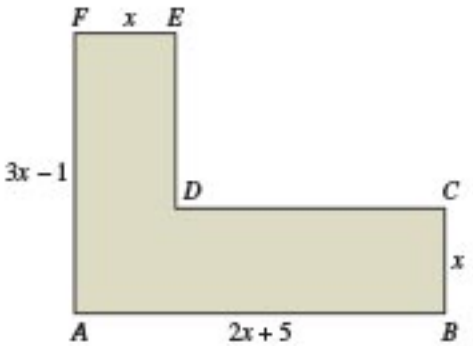
6. Според податоците на цртежот, запиши израз за пресметување на:

а) должината на $\overline{DC}$

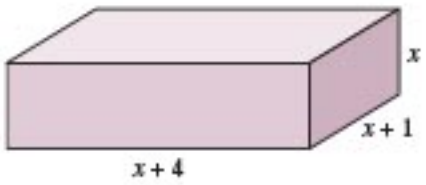
б) должината на $\overline{DE}$

в) периметарот на $ABCDEF$

г) плоштината на 2Д-формата $ABCDEF$.



7.



Според податоците на цртежот, запиши израз за пресметување на плоштината на даденият квадар. Упрости го добиениот израз.

8. **а)** Елена вози велосипед x km со средна брзина од 20 km/h.

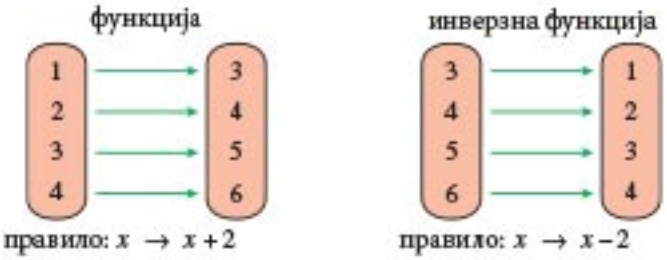
Запиши израз, во однос на x, за времето што ѝ е потребно на Елена да го помине целиот пат со истата брзина.

б) Елена потоа возела уште $2x$ km со средна брзина од 30 km/h.

Запиши израз, во однос на x, за вкупното време, во часови, што ѝ е потребно на Елена за да ги заврши двете етапи од патувањето и покажи дека тоа време се упростува до $\frac{7x}{60}$.

2.7 Инверзна функција

На дијаграмите се прикажани функцијата „додаваме 2“ и нејзината **инверзна функција** „одземаме 2“.



Инверзната функција е функција што ги применува инверзните операции на операциите во оригиналната функција.

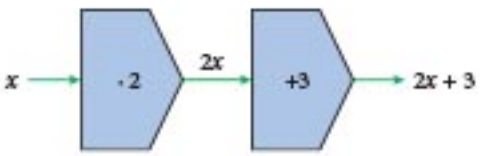
Слично, инверзна на функцијата $x \to 3x$ е функцијата $x \to \frac{x}{3}$

Тоа можеме да го запишеме на следниот начин:

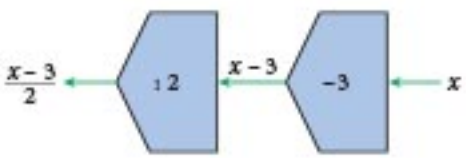
инверзна на функцијата $y = 3x$ е функцијата $y = \frac{x}{3}$

Можеме да ја најдеме инверзната функција на која било функција со користење инверзна функционална машина.

Функционалната машина за функцијата $x \to 2x + 3$ е:

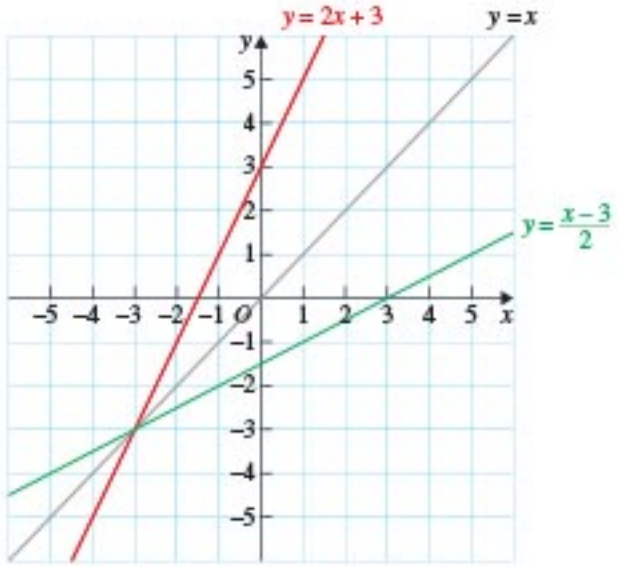


Инверзната функционална машина е:



Според тоа, инверзна функција на функцијата $x \to 2x + 3$ е функцијата $x \to \frac{x-3}{2}$

Ако ги нацртаме графиците на функцијата $y = 2x + 3$ и нејзината инверзна функција $y = \frac{x-3}{2}$ во ист координатен систем, ќе видиме посебна врска.



Графиците на функцијата и нејзината инверзна функција се симетрични прави една на друга во однос на правата $y = x$.

Пример 1

Одреди ја инверзната функција на функцијата $x \to \frac{3x-5}{2}$.

Функционалната машина за функцијата е: $x \to \cdot 3 \to 3x \to -5 \to 3x-5 \to :2 \to \frac{3x-5}{2}$

Инверзната функциионална машина е: $\frac{2x+5}{3} \leftarrow :3 \leftarrow 2x+5 \leftarrow +5 \leftarrow 2x \leftarrow \cdot 2 \leftarrow x$

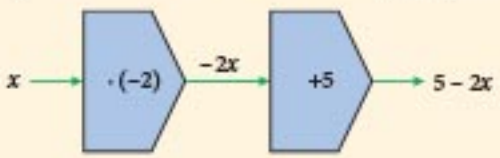
Според тоа, инверзната функција е $x \to \frac{2x+5}{3}$.

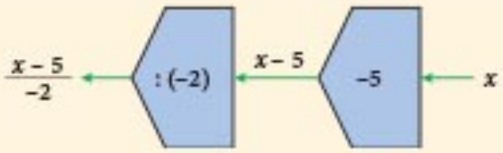
Пример 2

Одреди ја инверзната функција на функцијата $x \to 5 - 2x$.

Прво ја запишуваме функцијата како $x \to -2x + 5$.

Правилото на функцијата е „множиме со -2“ и потоа „додаваме 5“.





Според тоа, инверзната функција е $x \to \frac{x-5}{-2}$, што можеме да го упростиме до $x \to \frac{5-x}{2}$.

Задачи

1. Запиши ја инверзната функција на секоја од функциите.

а) $x \to 2x$ **б)** $x \to x+3$ **в)** $x \to x-6$ **г)** $x \to \frac{x}{5}$

2. Со функционална машина најди ја инверзната функција на секоја од функциите.

а) $x \to 3x+1$ **б)** $x \to 5x-3$ **в)** $x \to 4x+3$ **г)** $x \to 7x-1$

д) $x \to 2(x+3)$ **ѓ)** $x \to 4(x-7)$ **е)** $x \to \frac{x+2}{4}$ **ж)** $x \to \frac{x-8}{3}$

з) $x \to \frac{x}{4}-2$ **ѕ)** $x \to \frac{x}{6}+5$ **и)** $x \to \frac{3x+1}{2}$ **ј)** $x \to \frac{2x-3}{5}$

к) $x \to 5(2x-1)$ **л)** $x \to \frac{2x}{3}+1$ **љ)** $x \to \frac{4x+7}{2}$ **м)** $x \to \frac{3x-4}{7}$

3. Одреди ја инверзната функција на секоја од функциите.

а) $x \to 7-x$ **б)** $x \to 8-2x$ **в)** $x \to 15-3x$ **г)** $x \to \frac{3-2x}{4}$

4. Марко добил задача да ја најде инверзната функција на функцијата $x \to 2x-5$

Тој напишал:

Ако ги следам следниве чекори, ќе најдам инверзна функција:

Чекор 1 Запиши ја функцијата како: $y = 2x - 5$

Чекор 2 Замени ги местата на x и y: $x = 2y - 5$

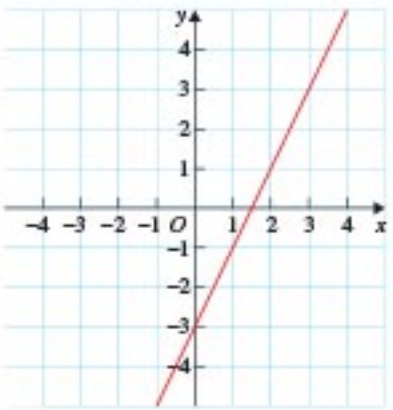
Чекор 3 Изрази го y: $y = \frac{x+5}{2}$

Чекор 4 Запиши ја инверзната функција: $x \to \frac{x+5}{2}$

Користи го овој метод за да ја најдеш инверзната функција на дадените функции:

а) $x \to 2x-9$ **б)** $x \to 4x+2$ **в)** $x \to \frac{2x-1}{4}$ **г)** $x \to \frac{3-2x}{5}$

5. Прецртај го графикот и доцртај го графикот на инверзната функција на дадената функција.



2.8 Правило за одредување следен член на низа

Низа е листа на броеви или форми што се поврзани со одредено правило.

8, 2, −4, −10, ... е линеарна низа.

Ја нарекуваме **линеарна низа** (или **аритметичка низа**) бидејќи разликата меѓу кои било два соседни члена е иста.



Правилото за одредување на следниот член во низата, е „−6“ или „одземаме 6“.

Низата 3, 6, 11, 18, 27, ... се нарекува **нелинеарна низа** бидејќи разликата меѓу кои било два соседни члена не е иста.



Разликите меѓу соседните членови формираат нова бројна низа.

Можеме да ја користиме низата од разлики за да ги најдеме следните членови во низата.



Пример 1

15, 18, 21, 24, …

Запиши ги: **а)** правилото за одредување следен член **б)** следните два члена на низата

а)



Правилото за одредување следен член на низата е „додаваме 3“.

б)



Следните два члена на низата се 27 и 30.

Пример 2

12, 17, 25, 36, 50, …

Запиши ги следните два члена на низата.

Прво да ја разгледаме бројната шема од разликите и потоа да ја искористиме шемата за да ги запишеме следните два члена.



Следните два члена на низата се 67 и 87.

Задачи

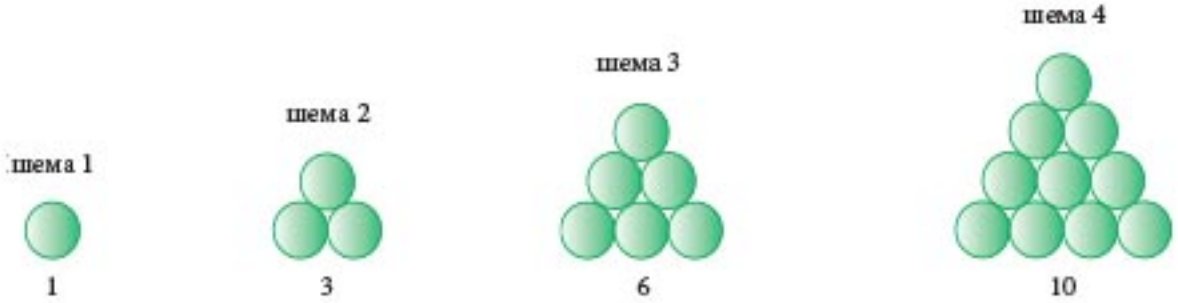
1. За секоја од низите запиши ги: **I** правилото за одредување следен член на низата.
II следните три члена.

а) 3, 5, 7, 9, …
б) 7, 11, 15, 19, …
в) 1, 6, 11, 16, …
г) 7; 8,5; 10; 11,5; …
д) 16, 13, 10, 7, …
ѓ) 5, −4, −13, −22, …
е) 1, 3, 9, 27, …
ж) 1, 10, 100, 1000, …
з) 32, 16, 8, 4, …

2. Разгледај ги разликите помеѓу соседните членови во секоја од низите и запиши ги следните три члена.

а) 1, 2, 4, 7, 11, …
б) 5, 6, 9, 14, 21, …
в) 2, 5, 11, 20, 32, …
г) 4, 9, 19, 34, 54, …
д) 20, 19, 17, 14, 10, …
ѓ) −4, −2, 2, 8, 16, …

3. Цртежите подолу прикажуваат како се формираат првите четири триаголни броја.



а) Запиши ги следните три триаголни броја.

б) Препиши ја и дополни ја следната табела.

Шема	1	2	3	4	5	6	7
Број на кругови	$1=\frac{1\cdot 2}{2}$	$3=\frac{2\cdot 3}{2}$	$6=\frac{3\cdot 4}{2}$	$10=\frac{4\cdot 5}{2}$			

в) Искористи ги шемите во табелата под **б)** за да запишеш формула за наоѓање на n-тиот триаголен број.

г) Искористи го решението под **в)** за да го запишеш стотиот триаголен број.

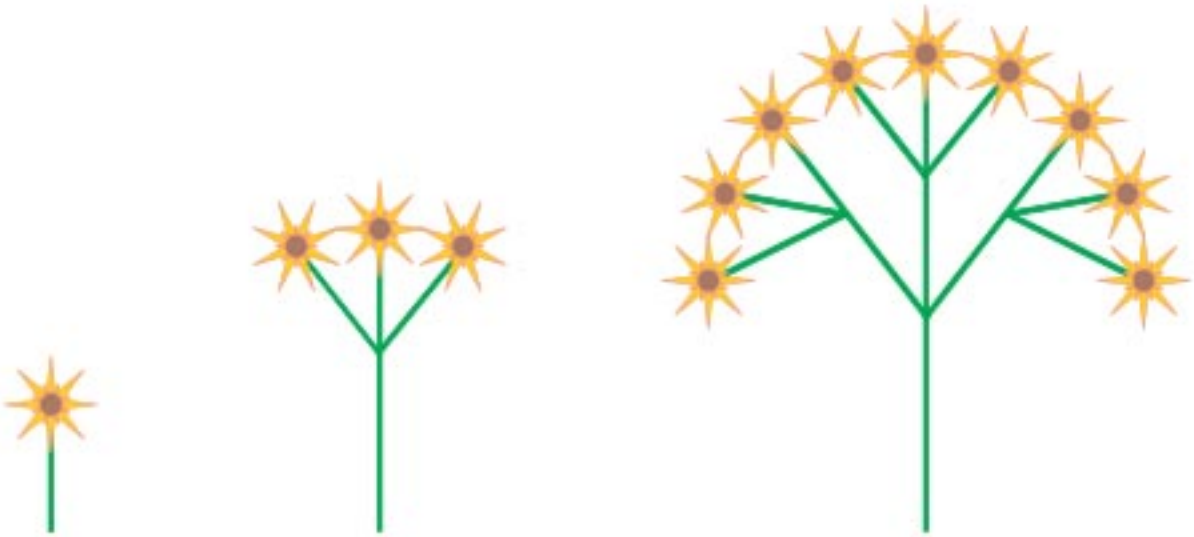
4. Низата 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, … се нарекува низа на Фибоначи.

Секој член на Фибоначиевата низа е збир на двата претходни члена во низата.

Запиши ги следните три члена на секоја од следниве низи со исто правило како низата на Фибоначи:

а) 5, 7, 12, 19, 31, …
б) 2, 2, 4, 6, 10, 16, …
в) 3, −4, −1, −5, −6, …

5. На цртежот е прикажано растењето на едно растение во текот на три години. Секоја година цветот се заменува со три стебленца и три други цвета.



година 1 година 2 година 3

Препиши ја и дополни ја табелата.

Година	1	2	3	4	5
Број на цветови	1	3	9		
Број на стебленца	1	4			

6. На цртежот е прикажана бројна низа:



цртеж 1 цртеж 2 цртеж 3 цртеж 4

На цртежите можеме да видиме како е формирана низата:

цртеж 1: $1 = 1 = 1^2$

цртеж 2: $1 + 3 = 4 = 2^2$

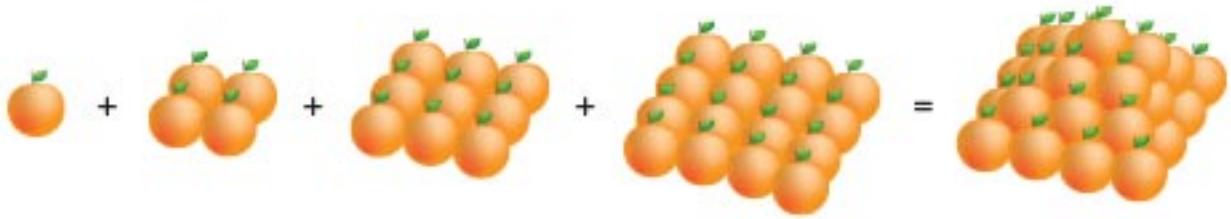
цртеж 3: $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

цртеж 4: $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

а) Запиши ги следните две редици на оваа бројна низа.

б) Користи ги бројните шеми за да го одредиш збирот на првите 20 непарни броеви.

7. На цртежот е прикажано како се формира пирамида од портокали.



Оваа пирамида има четири нивоа. Бројот на портокали во пирамидата = 1 + 4 + 9 + 16 = 30.

а) Колку портокали има во пирамида со три нивоа?

б) Колку портокали има во пирамида со пет нивоа?

в) Колку портокали има во пирамида со шест нивоа?

8. Дадена е низата: 83, 39, 42, 23, ...

Правилото за наоѓање на следниот член на низата е „помножи ги цифрите на последниот број и потоа додај 15“.

а) Запиши ги првите 10 члена на низата.

б) Кој е педесеттиот член на низата?

9. Дадена е следнава бројна низа:

редица 1: $1^3 = 1 = 1 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)^2$

редица 2: $1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9 = \left(\frac{2 \cdot 3}{2}\right)^2$

редица 3: $1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36 = \left(\frac{3 \cdot 4}{2}\right)^2$

редица 4: $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100 = \left(\frac{4 \cdot 5}{2}\right)^2$

а) Запиши ги следните две редици на оваа бројна низа.

б) Запиши формула за збирот на првите n кубни броеви.

10. Марко ја проучува низата на Фибоначи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Тој го разгледувал количникот на соседните членови.

Секој таков количник го запишал во форма 1 : n.

Количникот на првиот број и вториот број е 1 : 1

Количникот на вториот број и третиот број е 1 : 1

Количникот на третиот број и четвртиот број е 2 : 3 = 1 : 1,5

Количниот на четвртиот број и петтиот број е 3 : 5 = 1 : 1,666...

а) Одреди ги следните шест количници и опиши што формираат тие броеви.

б) На интернет побарај повеќе информации за овој „златен количник“, кој исто така се нарекува „златен размер“.

11.



цртеж 1



цртеж 2



цртеж 3



цртеж 4

На цртежите се прикажани првите четири чекори во цртањето на Коховата снегулка.

Коховата снегулка е фрактална шема.

а) На интернет побарај повеќе информации за триаголникот на Серпински.

Нацртај ги првите четири цртежи за триаголникот на Серпински.

б) Со помош на интернет проучи и други фрактални шеми.

2.9 Правило за одредување *n*-ти член на низа

За да ги најдеме броевите во една низа, можеме да го користиме и **правилото за одредување *n*-ти член на низата**.

Ако ова правило на низата е: членот = 3 · реден број на членот, па додаваме 5, тогаш првите четири члена се:

член 1 $= 3 \cdot 1 + 5 = 3 + 5 = 8$

член 2 $= 3 \cdot 2 + 5 = 6 + 5 = 11$

член 3 $= 3 \cdot 3 + 5 = 9 + 5 = 14$

член 4 $= 3 \cdot 4 + 5 = 12 + 5 = 17$

Правилото може да го запишеме и со формула: n-ти член $= 3n + 5$.

Пример 1

Правилото за наоѓање на n-тиот член на низата е: n-ти член $= 7n - 2$.

а) Запиши ги првите четири члена на низата.

б) Кој член на низата има вредност 327?

а) член 1 $= 7 \cdot 1 - 2 = 7 - 2 = 5$

член 2 $= 7 \cdot 2 - 2 = 14 - 2 = 12$

член 3 $= 7 \cdot 3 - 2 = 21 - 2 = 19$

член 4 $= 7 \cdot 4 - 2 = 28 - 2 = 26$

Првите четири члена се: 5, 12, 19, 26.

б) Ќе ја решиме равенката: $7n - 2 = 327$

$7n = 329$ Додаваме 2 на двете страни.

$n = 47$ Двете страни ги делиме со 7.

47-от член има вредност 327.

Пример 2

Правилото за наоѓање на n-тиот член на низата е: n-ти член $= 2n^2 + 5$.

Запиши ги првите четири члена на низата.

член $1 = 2 \cdot 1^2 + 5 = 2 \cdot 1 + 5 = 7$

член $2 = 2 \cdot 2^2 + 5 = 2 \cdot 4 + 5 = 13$

член $3 = 2 \cdot 3^2 + 5 = 2 \cdot 9 + 5 = 23$

член $4 = 2 \cdot 4^2 + 5 = 2 \cdot 16 + 5 = 37$

Првите четири члена се: 7, 13, 23 и 37.

Задачи

1. Запиши ги првите четири члена на линеарната низа чиј n-ти член е:

а) $n + 2$ **б)** $3n - 1$ **в)** $5n + 3$ **г)** $2n + 5$

д) $4n - 3$ **ѓ)** $40 - n$ **е)** $80 - 5n$ **ж)** $5 - 3n$

з) $0{,}5n + 3$ **ѕ)** $12 - 0{,}5n$ **и)** $\frac{2n-7}{2}$ **ј)** $\frac{6-5n}{4}$

2. Запиши ги првите пет члена на нелинеарната низа чиј n-ти член е:

а) n^2 **б)** $n^2 + 2$ **в)** $n^2 - 1$ **г)** $3n^2$

д) $n(n + 1)$ **ѓ)** $n^2 - 3n$ **е)** n^3 **ж)** $n^3 + 1$

з) $2n^3$ **ѕ)** $n(n+ 1)(n + 2)$ **и)** $\frac{n}{n+1}$ **ј)** $\frac{n+5}{2n}$

3. Дадена е низа со n-ти член $= 6n + 3$.
Кој член на низата има вредност 405?

4. Дадена е низа со n-ти член $= 2n - 7$.
Кој член на низата има вредност 301?

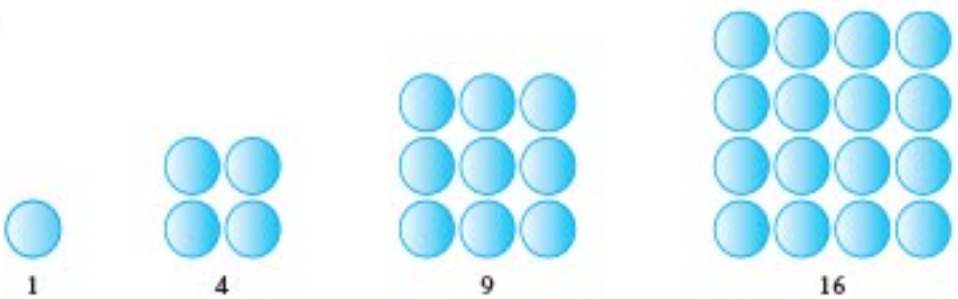
5. Дадена е низа со n-ти член $= 10 - 4n$.
Кој член на низата има вредност −258?

6. Дадена е низа со n-ти член $= \frac{5n+3}{2}$.
Кој член на низата има вредност 374?

7. Дадена е низа со n-ти член $= n^2 + 4$.
Кој член на низата има вредност 488?

8. Дадена е низа со n-ти член $= 2^n - 1$.
Кој член на низата има вредност 511?

9.



Низата од цртежи ги претставува првите четири члена на низата од полни квадрати.

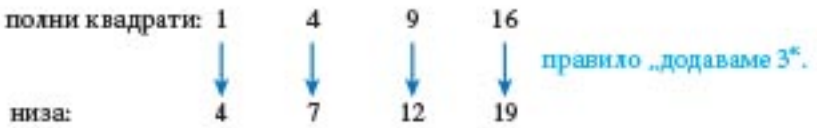
Правилото за наоѓање на n-тиот член на низата полни квадрати е: n-ти член $= n^2$.

Секоја од дадените низи е поврзана со низата полни квадрати.

Најди ја врската и потоа запиши го правилото за пресметување на n-тиот член на низата.

Првиот пример е решен.

а) 4, 7, 12, 19, …

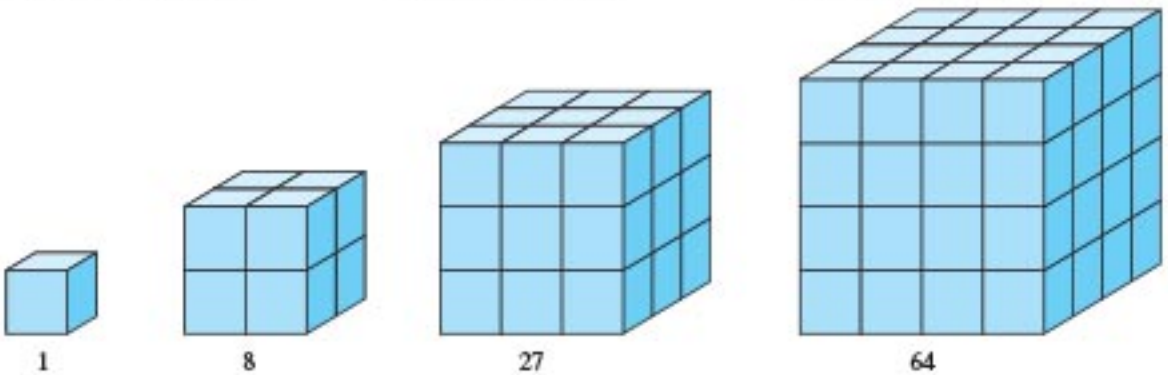


Според тоа, правилото е: n-ти член $= n^2 + 3$.

б) 2, 5, 10, 17, … **в)** 0, 3, 8, 15, … **г)** 7, 10, 15, 22, …

д) 3, 6, 11, 18, … **ѓ)** 2, 8, 18, 32, … **е)** 1, 7, 17, 31, …

10.



Низата цртежи ги претставува првите четири члена на низата од полни кубови.

Правилото за одредување на n-тиот член на низата полни кубови е: n-ти член $= n^3$.

Секоја од дадените низи е поврзана со низата од полни кубови.

Најди ја врската и потоа запиши го правилото за пресметување на n-тиот член на низата.

а) 2, 9, 28, 65, … **б)** 0, 7, 26, 63, … **в)** 6, 13, 32, 69, …

г) 4, 11, 30, 67, … **д)** 2, 16, 54, 128, … **ѓ)** 3, 17, 55, 129, …

11. Низата 2, 4, 8, 16,... е формирана на следниот начин.

$2^1 = 2$ $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$ $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

Според тоа, правилото за n-тиот член на низата е: n-ти член $= 2^n$.

Секоја од дадените низи е поврзана со низата 2, 4, 8, 16, ...

Најди ја врската и потоа запиши го правилото за пресметување на n-тиот член на низите.

а) 3, 5, 9, 17, … **б)** 0, 2, 6, 14, … **в)** 4, 6, 10, 18, …

г) 1, 3, 7, 15, … **д)** 6, 12, 24, 48, … **ѓ)** 7, 13, 25, 49, …

2.10 *n*-ти член на аритметичка низа

Кога работиме со бројни низи често се бара да ја најдеме вредноста на одреден член на низата.

На пример, да го најдеме 40-тиот член на низата: 3, 10, 17, 24, 31, ...

Запишување на сите членови на низата додека да дојдеме до бараниот член, не е најдобар метод на решавање. Најдобар начин е да го користиме правилото за *n*-ти член на низата.

Правилото за ***n*-ти член на низата** често го запишуваме алгебарски, со формула за пресметување на *n*-тиот член.

За да го најдеме ова правило, прво ги разгледуваме разликите меѓу соседните членови на низата.

Реден број, *n*	1	2	3	4	5
Член	3	10	17	24	31

+7 +7 +7 +7

Во овој случај, членовите се зголемуваат за 7.

Броевите во таблицата за множење со 7 исто така се зголемуваат за 7.

За да го најдеме остатокот од правилото, мораме да ги споредиме членовите со таблицата за множење со 7.

Реден број, *n*	1	2	3	4	5	·7
Таблица за множење со 7	7	14	21	28	35	−4
Член	3	10	17	24	31	

Правилото за *n*-ти член е:

член = 7 · реден број на член, а потоа одземаме 4.

Алгебарски, тоа може да се запише вака:

n-ти член = $7n - 4$.

Според тоа, 40-тиот член на оваа низа се наоѓа со замена на $n = 40$ во формулата.

$$\begin{aligned} 40\text{-ти член} &= 7 \cdot 40 - 4 \\ &= 280 - 4 \\ &= 276 \end{aligned}$$

Пример

Одреди ги *n*-тиот член и 50-тиот член на линеарната низа 37, 33, 29, 25, 21, ...

37 33 29 25 21

−4 −4 −4 −4

Членовите се намалуваат за 4. Затоа спореди ги членовите со таблицата за множење со −4.

Реден број, *n*	1	2	3	4	5	·(−4)
Таблица за множење со −4	−4	−8	−12	−16	−20	+41
Член	37	33	29	25	21	

Правилото е:

член = $-4 \cdot$ реден број на член, а потоа додаваме 41.

Според тоа, општиот член е n-тиот член = $-4n + 41 = 41 - 4n$.

50-ти член = $41 - 4 \cdot 50$

$= 41 - 200$

$= -159$

Задачи

1. Одреди ги: **I** n-тиот член **II** 50-тиот член на следниве растечки аритметички низи.

Прикажи ја твојата работа со табела. (Задачата под **а)** е решена како пример.)

а) 3, 7, 11, 15, …

Реден број, n	1	2	3	4	50	n
Член	3	7	11	15	199	$4n-1$

· 4 и одземи 1

+4 +4 +4

б) 2, 5, 8, 11, …

в) 2, 9, 16, 23, …

г) 9, 14, 19, 24, …

д) 1, 3, 5, 7, …

ѓ) 5, 16, 27, 38, …

е) 10, 18, 26, 34, …

ж) −2, 4, 10, 16, …

з) 3, 7, 11, 15, …

ѕ) −12, −5, 2, 9, …

2. Одреди ги: **I** n-тиот член **II** 30-тиот член на следниве опаѓачки аритметички низи.

Прикажи ја твојата работа со табела. (Задачата под **а)** е решена како пример.)

а) 5, 2, −1, −4, …

Реден број, n	1	2	3	4	30	n
Член	5	2	−1	−4	−82	$8-3n$

· (−3) и додај 8

−3 −3 −3

б) 30, 27, 24, 21, …

в) 56, 51, 46, 41, …

г) 88, 77, 66, 55, …

д) 40, 34, 28, 22, …

ѓ) 13, 9, 5, 1, …

е) 15, 7, −1, −9, …

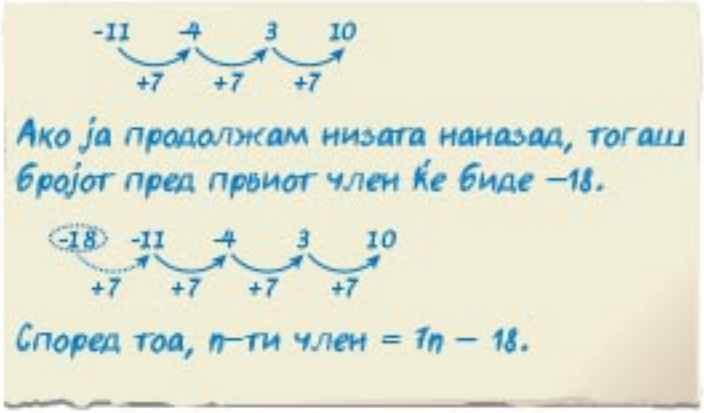
ж) 7, 5, 3, 1, …

з) −2, −7, −12, −17, …

ѕ) 3, −7, −17, −27, …

3. Фатима имала задача да го најде n-тиот член на низата: −11, −4, 3, 10, …

Таа запишала:



а) Препиши ги и дополни ги следните проверки за да покажеш дека n-тиот член на низата: $-11, -4, 3, 10, \ldots$ е $7n - 18$.

првиот член $= 7 \cdot 1 - 18 = -11$ вториот член $= 7 \cdot 2 - 18 = \ldots$

третиот член $= 7 \cdot 3 - 18 = \ldots$ четвртиот член $= 7 \cdot 4 - 18 = \ldots$

б) Искористи го начинот на решавање од задачата со Фатима за да го најдеш n-тиот член на следниве линеарни низи.

i 6, 13, 20, 27, … **ii** 9, 20, 31, 42, … **iii** 40, 42, 44, 46, …

iv 33, 37, 41, 45, … **v** 8, 3, −2, −7, … **vi** 83, 76, 69, 62, …

4. Дадени се цртежи составени од крстови.



цртеж 1 цртеж 2 цртеж 3

а) Одреди го бројот на крстови потребни да се направи:

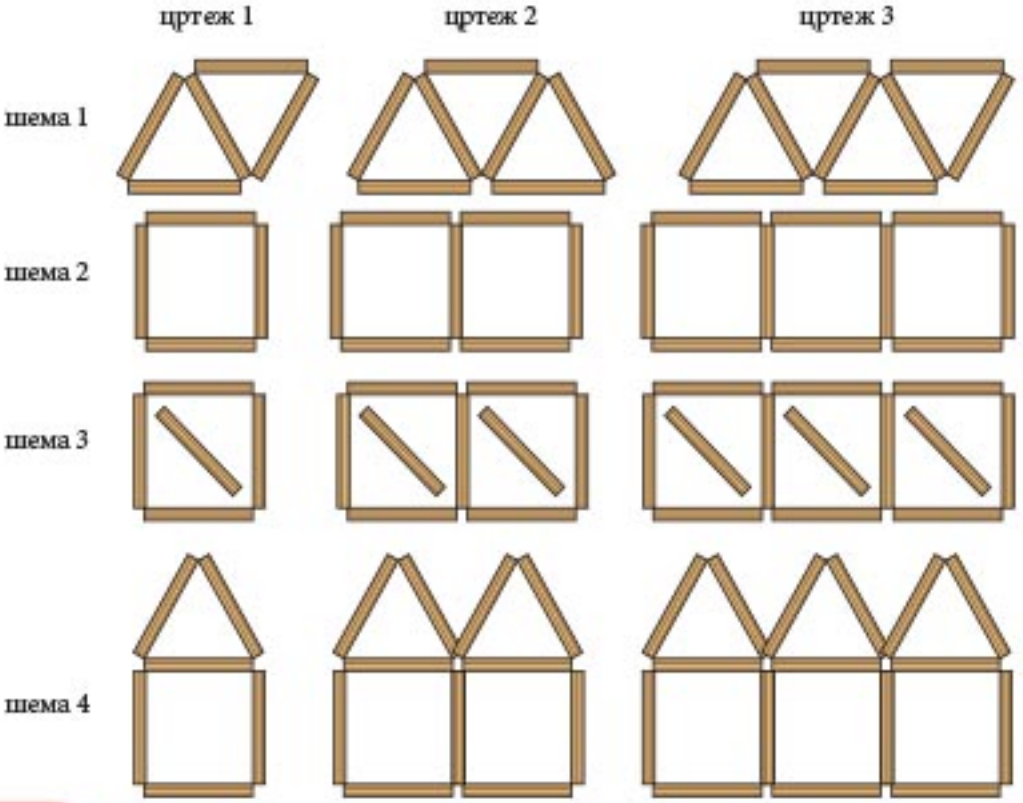
i цртеж 4 **ii** цртеж 5 **iii** цртеж 6.

б) Препиши ја и дополни ја табелата на шемата.

Цртеж	1	2	3	4	5	6
Број на крстови	4	7				

в) Запиши го правилото за наоѓање на бројот на крстови во цртежот n.

5. Цртежите прикажуваат четири различни шеми формирани од кибритчиња.



а) Нацртај го цртеж 4 за секоја шема.

б) Препиши ја и дополни ја табелата за секоја шема.

Цртеж	1	2	3	4
Број на кибритчиња				

в) Запиши го правилото за наоѓање на бројот на кибритчиња во цртежот n на секоја шема.

Задачи за повторување

1. Упрости:

а) $7x \cdot x$ **б)** $5a \cdot 2b \cdot 3a$ **в)** $2xy \cdot 3x \cdot 5xy \cdot x$

2. Упрости:

а) $\frac{9x}{12}$ **б)** $\frac{3xy}{x^2}$ **в)** $\frac{6x}{10y}$ **г)** $\frac{4a^2b}{6ab^2}$

3. Реши ја равенката: $2^x = 32$

4. Упрости:

а) $x^4 \cdot x^5$ **б)** $2y^3 \cdot 5y$ **в)** $8a^4 \cdot 3a^7$ **г)** $y^4 \cdot y \cdot y^8$

д) $x^9 : x^3$ **ѓ)** $\frac{35x^8}{40x^2}$ **е)** $\frac{x^{15}}{x^4 \cdot x^2}$ **ж)** $(x^5)^4$

5. Разложи ги на множители изразите:

а) $20x + 16$ **б)** $y^2 - 4y$ **в)** $3x^2 - 6x$ **г)** $6x + 4y + 8z$

6. Пресметај и упрости:

а) $\frac{x}{5} + \frac{x}{5}$ **б)** $\frac{x}{6} + \frac{x}{3}$ **в)** $\frac{7x}{10} - \frac{x}{4}$ **г)** $\frac{5}{3x} + \frac{1}{3x}$

7. Реши ги равенките.

а) $3x = 12$ **б)** $x + 5 = 16$ **в)** $3x - 4 = 11$

г) $5x + 4 = 6 + 3x$ **д)** $\frac{x+1}{4} = 5$ **ѓ)** $\frac{7-2x}{2} = 5$

е) $\frac{x}{4} + 8 = 2$ **ж)** $3(2x - 7) = 4x + 3$ **з)** $\frac{15+x}{2} = 7 - x$

ѕ) $\frac{x+5}{2} = \frac{x-4}{3}$ **и)** $5(3x - 2) - 2(3x - 4) = 13$

8. Одреди ги инверзните функции на функциите.

а) $x \to 5x$ **б)** $x \to x - 8$ **в)** $x \to 6x - 4$ **г)** $x \to \frac{3x-5}{2}$

9. Запиши ги следните три члена на секоја од следните низи:

а) 13, 19, 25, 31, … **б)** −14, −11, −8, −5, … **в)** 7, 14, 28, 56, …

г) 7, 5, 3, 1, … **д)** 400, 200, 100, 50, … **ѓ)** 3, 6, 11, 18, 27, …

е) −7, −5, −1, 5, 13, … **ж)** 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, … **з)** 16, 8, 4, 2, 1, …

ѕ) $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \ldots$ **и)** $\frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \frac{6}{25}, \ldots$ **ј)** $5a^5, 8a^7, 11a^9, 14a^{11}, \ldots$

10. Запиши ги првите четири члена на низата чиј n-ти член е:

а) $n+3$ **б)** $2n-1$ **в)** $4n+3$ **г)** $4n-5$

д) $23-2n$ **ѓ)** $15-4n$ **е)** n^2+1 **ж)** n^2-2

з) $2n^2$ **ѕ)** $n(n+1)$ **и)** n^2+5n **ј)** n^3+2

11. Дадена е една бројна шема.

редица 1: $2 = 2 = 1^2+1$

редица 2: $2+4 = 6 = 2^2+2$

редица 3: $2+4+6 = 12 = 3^2+3$

редица 4: $2+4+6+8 = 20 = 4^2+4$

а) Запиши ги следните две редици на низата.

б) Запиши формула за збирот на броевите во редицата n.

12. Низата 3, 9, 27, 81, ... е формирана на следниот начин.

$3^1=3 \quad 3^2=3\cdot 3=9 \quad 3^3=3\cdot 3\cdot 3=27 \quad 3^4=3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=81$

Според тоа, општиот член на низата е: n-ти член $=3^n$.

Секоја од следните низи е поврзана со низата 3, 9, 27, 81, ...

Одреди ја врската и потоа запиши го правилото за n-тиот член на низите.

а) 4, 10, 28, 82, … **б)** 7, 13, 31, 85, … **в)** 1, 7, 25, 79, …

г) 2, 8, 26, 80 **д)** 6, 18, 54, 162, … **ѓ)** 7, 20, 57, 166, …

13.



цртеж 1 цртеж 2 цртеж 3 цртеж 4

Со цртежите е покажано како се формира следнава бројна низа:

цртеж 1: $1 = 1 = 1^2$

цртеж 2: $1+2+1 = 4 = 2^2$

цртеж 3: $1+2+3+2+1 = 9 = 3^2$

цртеж 4: $1+2+3+4+3+2+1 = 16 = 4^2$

а) Запиши ги следните две редици на низата.

б) Користи ги бројните шеми за да го најдеш вкупниот број кругови во:

i цртежот 20 **ii** цртежот 50.

14. Одреди ги: **i** n-тиот член **ii** 40-тиот член на следниве аритметички низи.

а) 12, 14, 16, 18, …
б) 5, 11, 17, 23, …
в) $-9, -5, -1, 3, \ldots$
г) 41, 45, 49, 53, …
д) 3, 14, 25, 36, …
ѓ) 2, 11, 20, 29, …
е) 17, 14, 11, 8, …
ж) 38, 32, 26, 20, …
з) $-11, -19, -27, -35, \ldots$

15. Столовите се наредени околу масите како што е прикажано на цртежите.



1 маса 2 маси 3 маси

а) Препиши ја и дополни ја табелата.

Број на маси	1	2	3	4
Број на столови	6			

б) Одреди го бројот на луѓе што можат да седнат на 10 маси распоредени на ваков начин.

в) Одреди го бројот на луѓе што можат да седнат на n маси распоредени на ваков начин.

г) Одреди го бројот на маси што се потребни да седнат 50 луѓе на ваков начин.

3 Геометрија и решавање проблеми

Наставни цели

- Црта 3Д-форми на изометриска хартија (хартија со точки).
- Анализира 3Д-форми преку мрежи и проекции.
- Идентификува рамнина на симетрија кај 3Д-форми.
- Создава шаблони од триаголници и четириаголници што се повторуваат за покривање рамнина, користејќи збир на агли, ротација за 180° и транслација; знае кој правилен многуаголник ќе ја покрие рамнината и објаснува зошто не може со други.
- Знае кои елементи се потребни за осна симетрија, ротација, транслација и сличност.
- Знае дека со транслација, ротација и осна симетрија се задржува должината на страните и големината на аглите и предметот се пресликува во складна слика, а со сличност се задржува големината на аглите, но не и должината на страните.
- Трансформира 2Д-форми со комбинација на ротација, осна симетрија и транслација; ја опишува трансформацијата со која предметот е трансформиран во својата слика.
- Користи координатна мрежа за решавање проблеми што вклучуваат транслација, ротација, осна симетрија и сличност.
- Трансформира 2Д форми со даден центар и коефициент на сличност кој е позитивен цел број поголем од 1; го идентификува коефициентот на сличност како размер од должините на кои било две соодветни отсечки.

3.1 Три димензии

Цртање цртеж

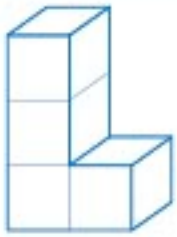
План е прецизна скица во размер на некој објект или на друга конструкција.

Планот на куќа прикажан десно е нацртан рачно од архитект.

Денес плановите ретко се цртаат рачно, најчесто се користат компјутерски програми за цртање.



План и проекции



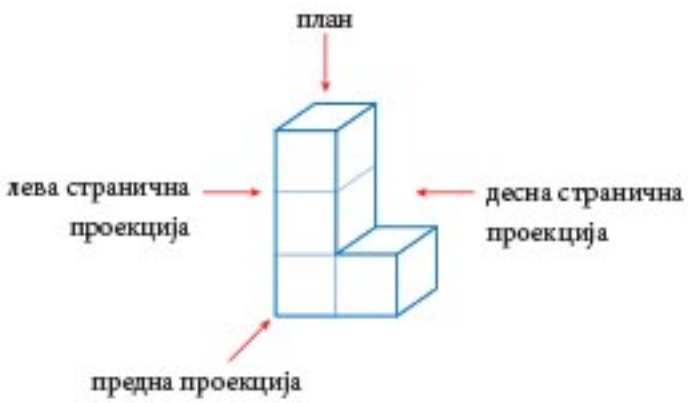
На цртежот е претствена 3Д-форма составена од од четири коцки.

Страната на секоја коцка е долга 2 cm.

Со ваквите цртежи ја прикажуваме 3Д-формата, но тоа не се прецизни цртежи во размер. Овие цртежи ги нарекуваме скици.

Со цртање **план** и **проекции** на 3Д-формата од различни страни, 3Д-формата можеме да го прикажеме во вистинска големина или во размер.

На цртежот се прикажани план и проекции на една 3Д-форма.

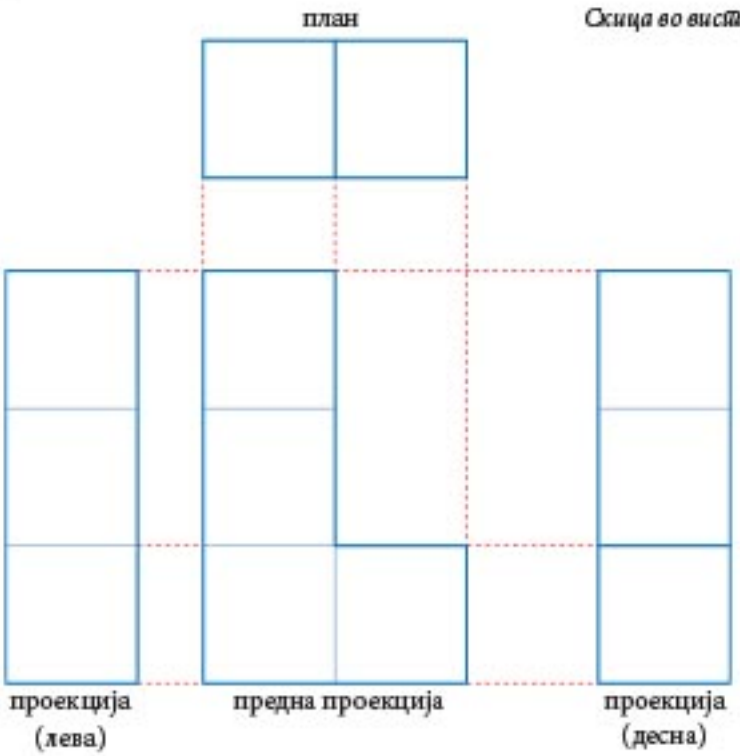


План е изгледот на 3Д-формата кога го гледаме одозгора.

Предна проекција е изгледот на 3Д-формата кога го гледаме од предната страна.

Страничните проекции се изгледите на 3Д-формата кога го гледаме од лева страна, односно од десна страна.

Скица во вистинска големина



Цртежот е нацртан во вистинска големина. За поголеми 3Д-форми можеме да цртаме во размер.

Испрекинатите црвени прави не се неопходни, но ги користиме за да прикажеме дека планот и проекциите имаат исти димензии.

Обично не е неопходно да се цртаат двете странични проекции.

На десната проекција забележуваме една потемна линија.

Таа означува дека постои промена на нивото спроти проекцијата.

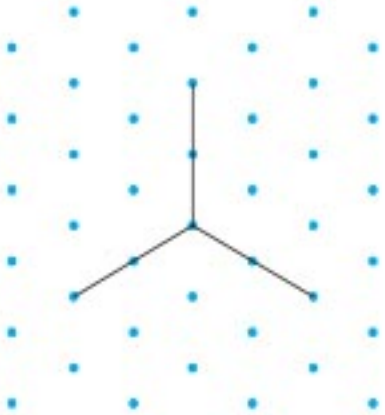
Изометриски цртежи

Друг начин за прикажување тридимензионални објекти во **рамнина** е со користење **изометриска хартија**.

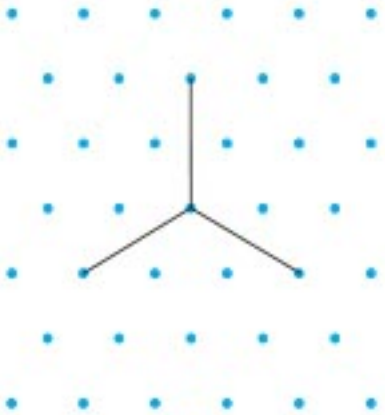
Изометриската хартија е хартија на која е нацртана мрежа од точки поставени како темиња од рамностран триаголник, обично на меѓусебно растојание од 1 cm.

Важно е хартијата да биде поставена во правилна положба кога цртаме 3Д-форми.

Правилна поставеност на хартијата добиваме кога правата што минува низ три точки стои вертикално на хартијата.



правилна положба



неправилна положба

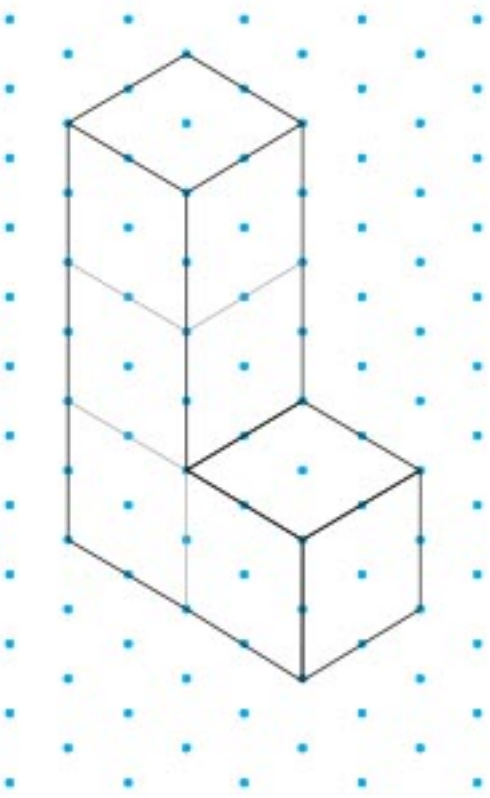
На сликата е прикажан изометриски цртеж на 3Д-форма во форма на буквата L.

Забележуваме дека вертикалните линии навистина стојат вертикално на цртежот.

Сите прави минуваат низ потребните точки.

Цртежот е нацртан во вистинска големина.

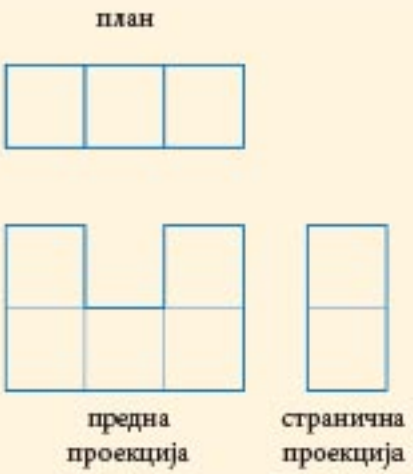
Секој раб на 3Д-формата е нацртан во вистинска должина.



Пример

На цртежот се прикажани план и проекции на една 3Д-форма.

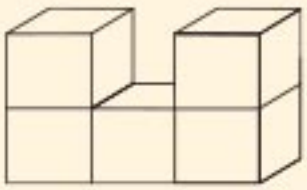
Нацртај ја 3Д-формата.



Прво цртаме скица на 3Д-формата.

Цртаме цртеж на 3Д-формата како што би требало да изгледа во просторот.

Скицата на десната страна го прикажува 3Д-формата.

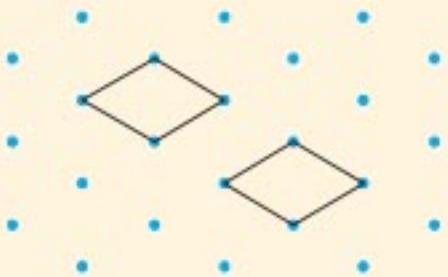


Почнуваме со цртање на горниот дел на 3Д-формата на изометриска хартија.

Проверуваме дали хартијата има правилна положба.

Секој од малите квадрати изгледа како ромб.

Страните на ромбовите имаат должина од 1 cm.



Потоа ги цртаме вертикалните линии.



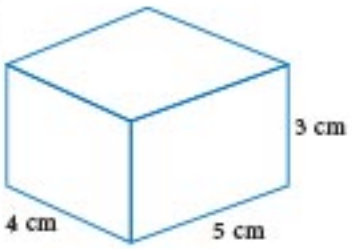


Цртежот го завршуваме со цртање на преостанатите линии.

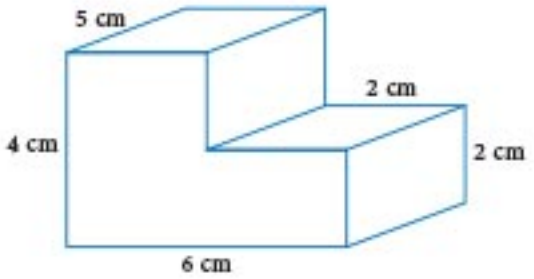
Задачи

1. Нацртај план, предна проекција и една странична проекција за следниве 3Д-форми.

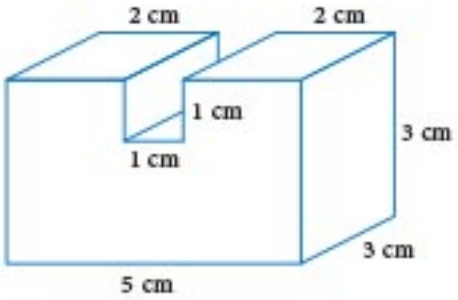
а)



б)

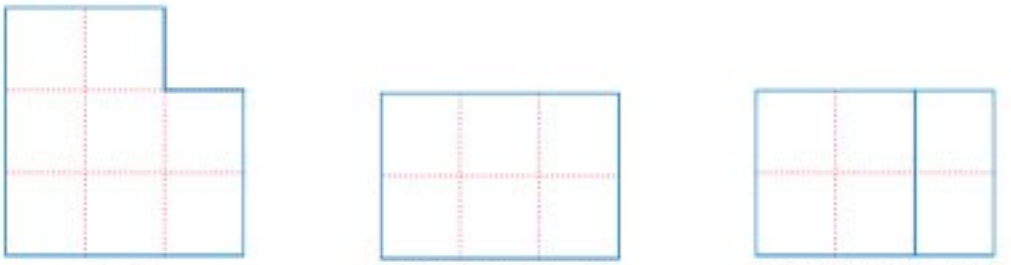


в)



2. 3Д-формите од претходната задача нацртај ги на изометриска хартија.

3. На цртежите се прикажани планот и проекциите на една 3Д-форма.



Нацртај ја 3Д-формата на изометриска хартија.

4. На цртежите се прикажани план, предната проекција и една странична проекција на една 3Д-форма.

Скицирај ја секоја од формите и запиши го нејзиното математичко име.

а)

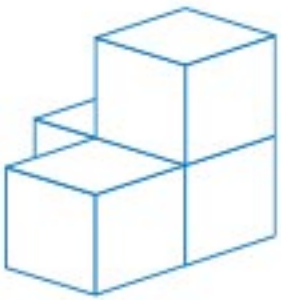


б)



в)





5. Дадената 3Д-форма е составено од четири коцки.

Работ на секоја коцка е долг 2 cm.

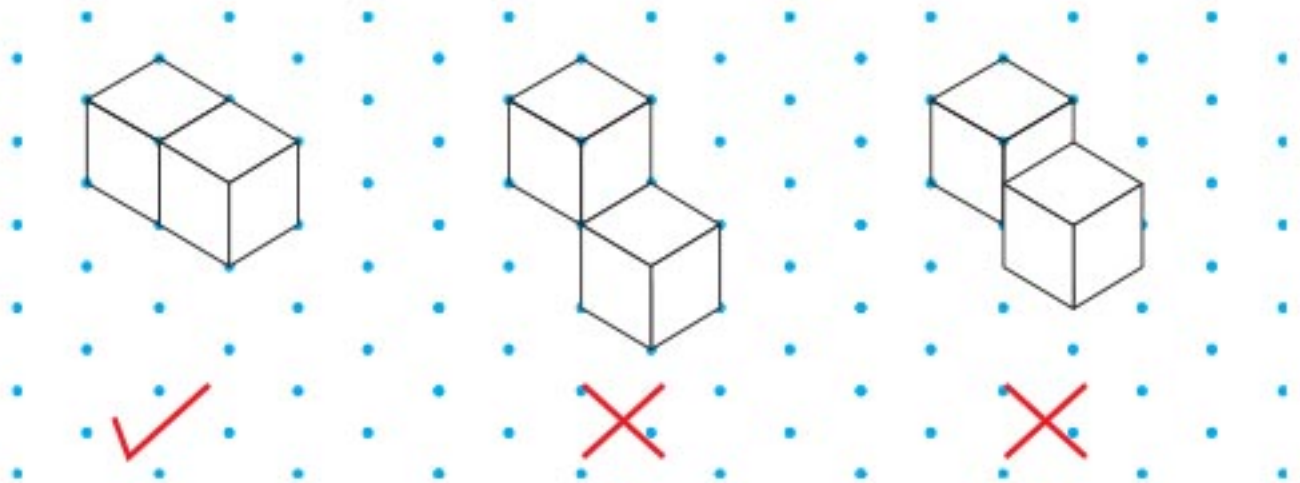
Нацртај план и проекција на 3Д-формата.

6. 3Д-формата во претходната задача е составена од четири споени коцки.

Најди други 3Д-форми што можат да се формираат со спојување на четири коцки.

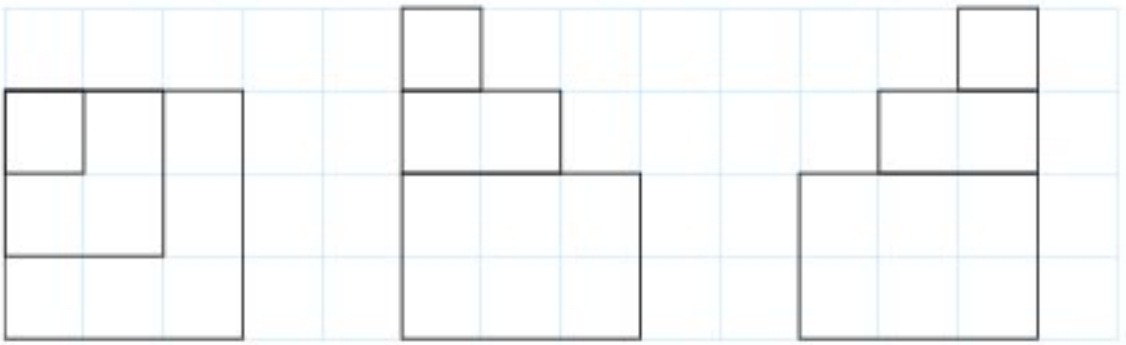
Коцките се споени така што се допираат ѕид до ѕид по целата површина и не се преклопуваат, односно не влегуваат една во друга.

Користи мали коцки за да видиш како изгледа 3Д-формата пред да го нацрташ.



Нацртај ги добиените 3Д-форми на изометриска хартија.

7. На цртежите се прикажани планот и проекциите на една 3Д-форма.



план | предна проекција | странична проекција

Нацртај ја 3Д-формата на изометриска хартија.

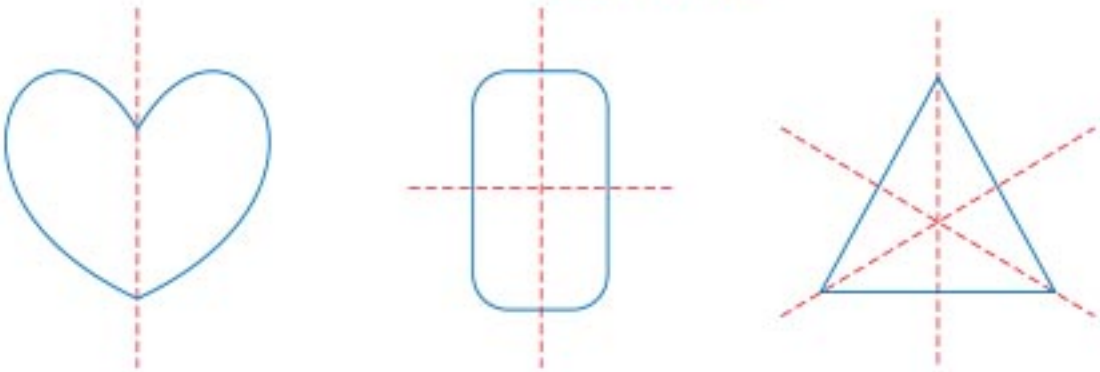
Направи скица од 3Д-формата со помош на споени коцки.

3.2 Осна симетрија во три димензии

Во рамнина, оската на симетрија ја дели 2Д-формата на два **складни** дела.

Секој од двата дела е огледална слика на другиот.

На цртежот се прикажани некои примери на **осна симетрија** на 2Д-форми.

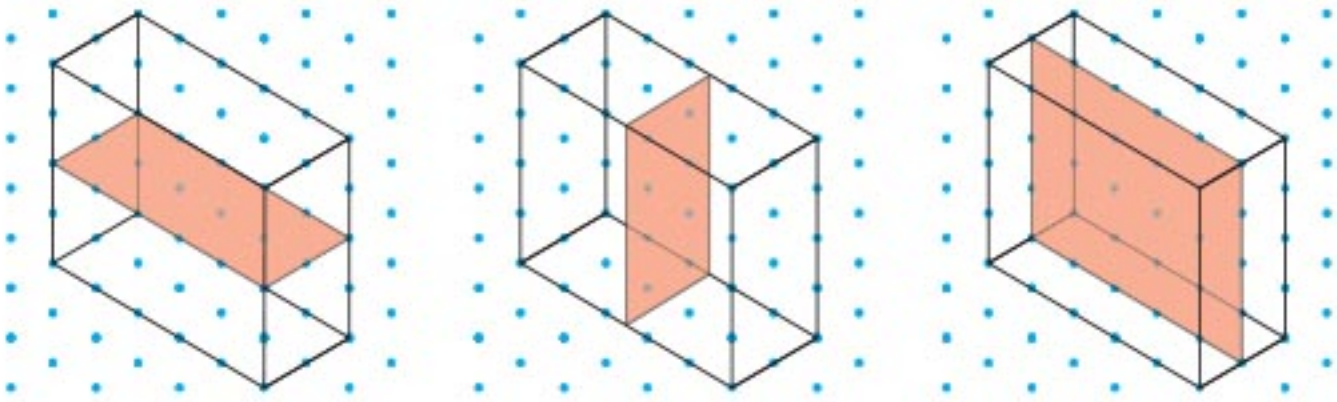


1 оска на симетрија | 2 оски на симетрија | 3 оски на симетрија

Во тридимензионален простор, разгледуваме симетрија во однос на **рамнина на симетрија** што ја дели 3Д-формата на два складни дела.

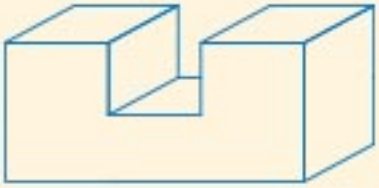
Под рамнина подразбираме рамна површина.

Дадениот квадар има три рамнини на симетрија.

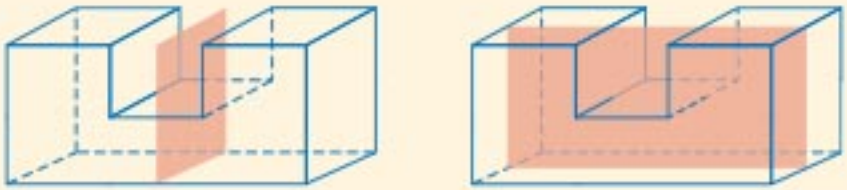


Пример

Одреди колку рамнини на симетрија има дадената 3Д-форма.



За да ги најдеме рамнините на симетрија можеме да нацртаме скици на 3Д-формата.



На скиците се прикажани двете рамнини на симетрија на дадената 3Д-форма.

Задачи

1. На цртежот е прикажана пирамида со основа квадрат и една нејзина рамнина на симетрија.

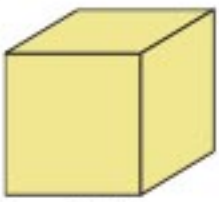
   Пирамидата има уште три рамнини на симетрија.

   На посебни цртежи прикажи ги другите три рамнини на симетрија.



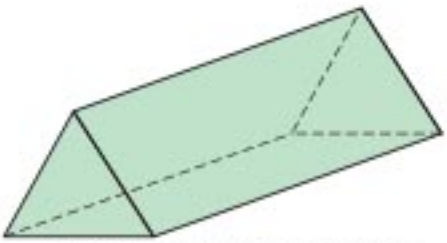
2. Пресметај колку рамнини на симетрија има секоја од следниве тридимензионални форми.

а)



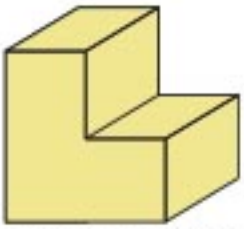
коцка

б)



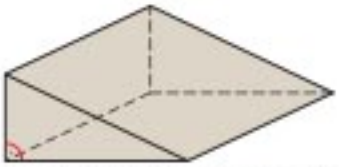
призма со основа рамностран триаголник

в)



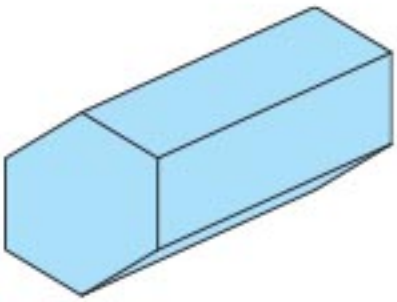
призма во L-форма

г)



призма со основа правоаголен триаголник

д)

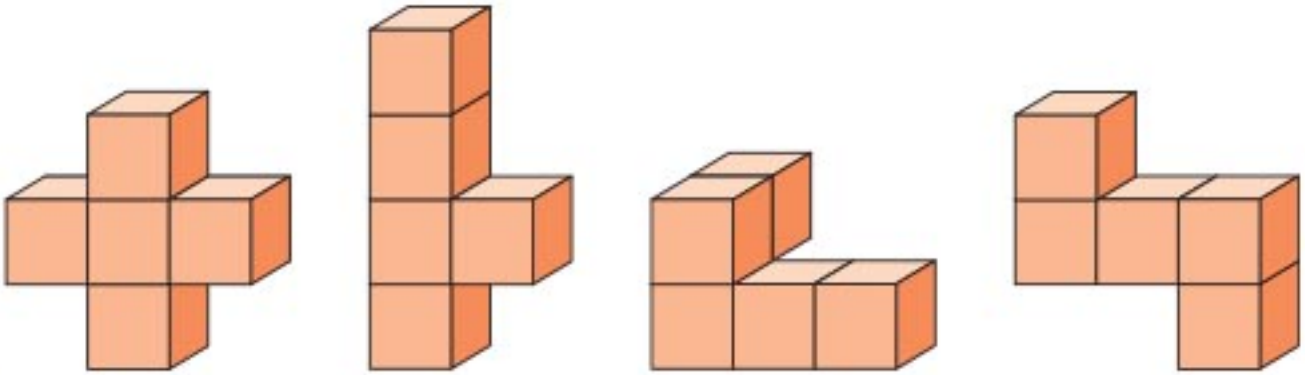


призма со основа правилен шестаголник

3. Секоја од дадените 3Д-форми е составена од пет коцки.

Одреди по колку рамнини на симетрија има секоја од нив.

а) **б)** **в)** **г)**



4. Секоја од 3Д-формите во претходната задача е составена од пет коцки.

Направи друга распределба на петте коцки така што новодобиената 3Д-форма ќе има две рамнини на симетрија.

Користи мали коцки за да провериш дали постои 3Д-форма со две рамнини на симетрија.

3.3 Тесалација

Римски мозаици

Зборот „тесалација" потекнува од латинскиот збор „tesare" што понекогаш се пишувал како „tessela" и означувал мала плочка.

Тесалација или мозаик е уметност на креирање слики составени од мали парчиња од обоено стакло, камен или друг материјал.

Првите мозаици ги среќаваме многу одамна. Мозаици правеле Сумерите пред 4000 години при украсувањето на градбите.

Римјаните биле особено познати по нивните мозаици на подовите и ѕидовите.

Во Македонија постојат остатоци од римски мозаици во археолошкиот локалитет Стоби во близина на Велес.



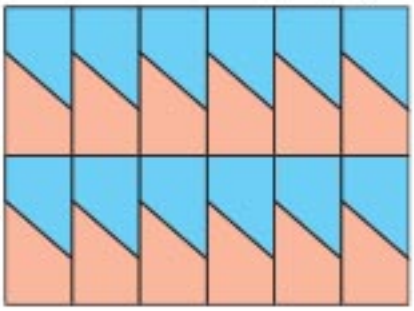


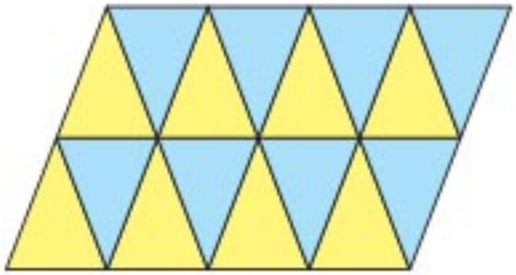
Триаголници и четириаголници

Шема на форми што покриваат рамна површина без преклопувања или празнини ја нарекуваме **тесалација** или **мозаик**.

На сликите се прикажани примери на тесалација.

Во секоја шема има една форма што се повторува повеќепати.





Да ја разгледаме постапката за тесалација од триаголници.

Чекор 1

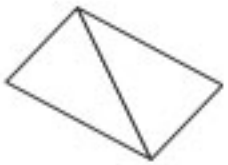
Цртаме произволен триаголник.



Чекор 2

Непосредно до почетниот триаголник цртаме нов триаголник добиен со ротација на почетниот триаголник за 180°.

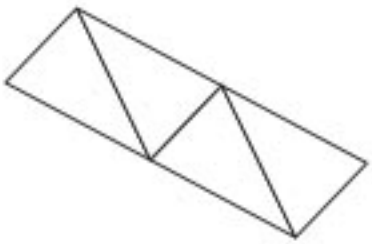
Добивме паралелограм формиран од два триаголника.



Чекор 3

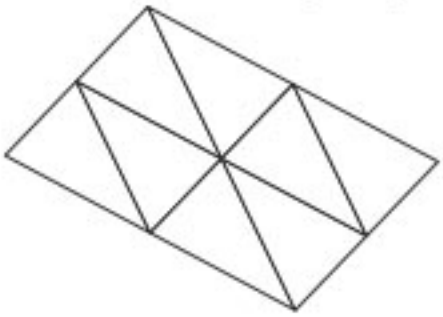
Ги повторуваме првите два чекора за да поставиме друг паралелограм непосредно до првиот.

Продолжуваме да ја правиме редицата триаголници.



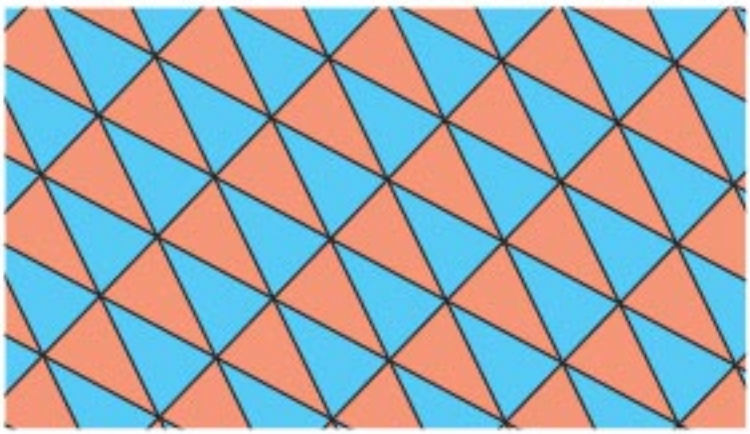
Чекор 4

Цртаме друга редица триаголници непосредно до првата редица.



Чекор 5

Сега можеме да видиме како е изградена тесалацијата. Крајната шема ја обојуваме.



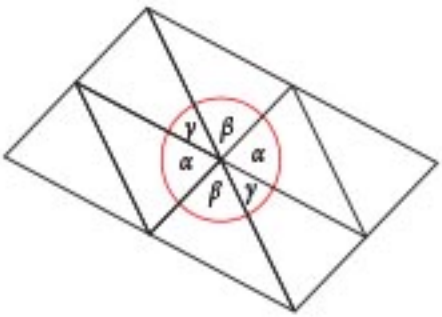
Ќе ги означиме аглите на триаголникот за да видиме зошто е можно формирањето тесалација.



Ова е почетниот триаголник со означени агли α, β и γ.

Збирот на аглите во триаголникот е 180°, па $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Го разгледуваме аголот на формираната тесалација.



Околу темето во кое се спојуваат четири четириаголници, цртаме кружница. Забележуваме дека секој од аглите на почетниот триаголник се појавува по двапати во оваа кружница.

Збирот на аглите во темето е $2\alpha + 2\beta + 2\gamma$

$= 2(\alpha + \beta + \gamma)$

$= 2 \cdot 180°$

$= 360°$

Знаеме дека полниот агол има 360° и тоа значи дека една 2Д-форма е тесалација ако збирот на аглите во темето во кое се спојуваат 2Д-формите, е 360°.

Пример

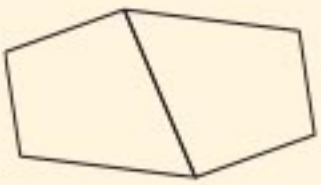
а) Формирај тесалација од четириаголник со претходно опишаната постапка.

б) Покажи дека збирот на аглите во секое внатрешно теме на тесалацијата е 360°.

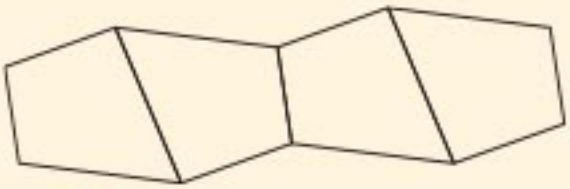
а)



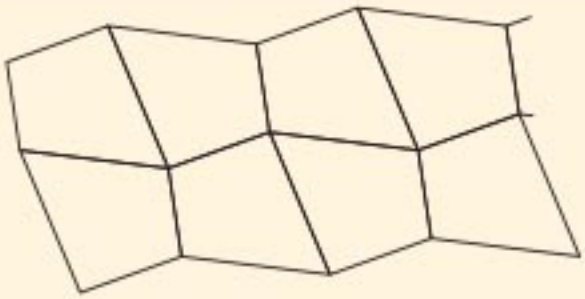
Чекор 1: Цртаме четириаголник.



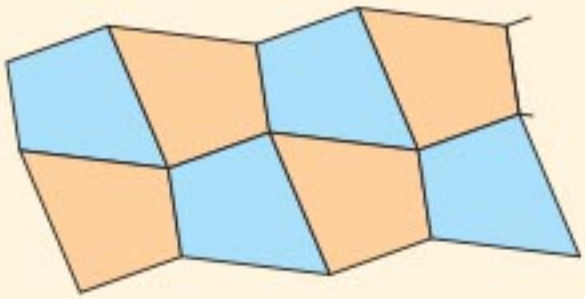
Чекор 2: Цртаме четириаголник добиен со ротација за 180° непосредно до почетниот четириаголник.



Чекор 3: Го повторуваме процесот за да формираме редица четириаголници.



Чекор 4: Цртаме друга редица непосредно до првата редица.

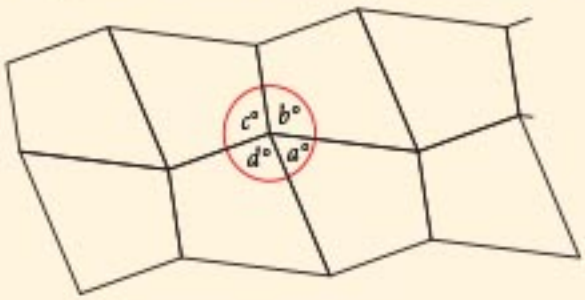


Чекор 5: Ја обојуваме крајната тесалација.

б) 

Ги означуваме четирите агли $a°$, $b°$, $c°$ и $d°$ на почетниот четириаголник.

Збирот на аглите во четириаголникот е 360°, па $a° + b° + c° + d° = 360°$.



Ги означуваме аглите во внатрешното теме на крајната форма.

Четирите агли во секое внатрешно теме се $a°$, $b°$, $c°$ и $d°$.

Знаеме дека збир на агли во четириаголник е $a° + b° + c° + d° = 360°$, па заклучуваме дека збирот на аглите во темето е 360°. Значи, формирана е тесалација.

Задачи

1. Прецртај го триаголникот во тетратка.
   Користи ја погоре опишаната постапка за цртање тесалација.
   Нацртај тесалација од дадениот триаголник.



2. Прецртај го четириаголникот во тетратка.
   Користи ја погоре опишаната постапка за цртање тесалација.
   Нацртај тесалација од дадениот четириаголник.



3. **а)** Нацртај тесалација од дадениот четириаголник.

б) Со означување на аглите покажи дека збирот на аглите во секое внатрешно теме на тесалацијата е 360°.

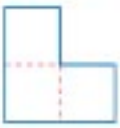


4. 2Д-формата има форма на буквата L и е составена од три квадрати.

Постојат неколку начини со кои може да се формира тесалација од оваа 2Д-форма.

Нацртај тесалација од дадената 2Д-форма.

Цртај во тетратка со квадратчиња за полесно да ја формираш тесалацијата.

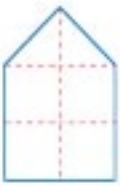


5. На цртежот е претставен петаголник со внатрешни агли 90°, 90°, 135°, 90° и 135°.

а) Нацртај тесалација од овој петаголник.

б) Покажи дека збирот на аглите во секое внатрешно теме е 360°.

Нацртај барем 8 копии на 2Д-формата за да видиш како продолжува шемата во тесалацијата.



3.4 Опишување трансформации

Во VII и во VIII одделение учевме за четири вида **трансформации**.

Трансформацијата го менува **оригиналот**, почетната 2Д-форма, во **слика**, крајната 2Д-форма.

Трансформациите што досега ги учевме се осна симетрија, ротација, транслација и сличност.

При осна симетрија, ротација или транслација, сликата е складна со оригиналот.

Ако две 2Д-форми се складни, тогаш тоа значи дека тие имаат еднакви страни и еднакви агли.

Ако комбинираме две или повеќе вакви трансформации, сликата останува складна со оригиналот.

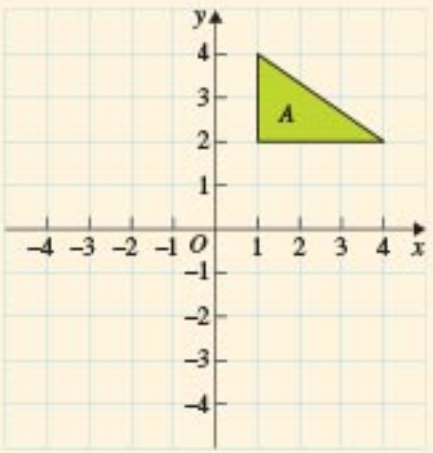
Пример 1

Прецртај го цртежот во тетратка со квадратчиња.

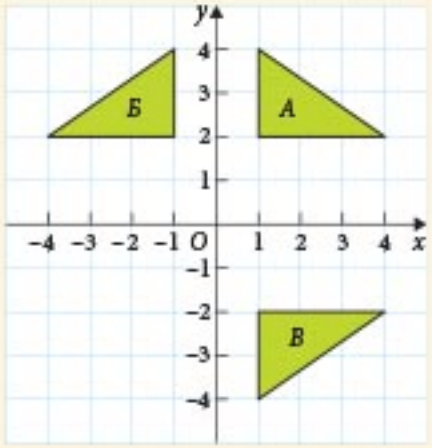
а) Одреди ја сликата на триаголникот А добиена со осна симетрија во однос на y-оската.
Означи го новиот триаголник Б.

б) Ротирај ја 2Д-формата Б за 180° околу (0, 0).
Новата 2Д-форма означи ја со В.

в) Детално опиши ја единствената трансформација што ја пресликува 2Д-формата А во 2Д-формата В.



а) и б)



На цртежот се прикажани 2Д-формите Б и В по оската симетрија и ротацијата.

в) Трансформацијата што ја пресликува 2Д-формата А во 2Д-формата В е осна симетрија.

Правата на симетрија е x-оската.

Деталниот опис на трансформацијата е: Осна симетрија во однос на x-оска.

Детални описи

Да видиме што се подразбира под детален опис на секоја трансформација.

Осна симетрија

Треба да е зададена правата на симетрија.

Таа може да биде дадена како равенка на права.

Ротација

Треба да се зададени:

– Центарот на ротација, често зададен преку координатите.

– Аголот на ротација, во степени или како дел од кружница (во вид на дропка).

– Насоката на ротација (насока на движење на стрелките на часовникот или спротивната). Ако аголот на ротација е 180°, тогаш не е потребно да ја наведеме насоката на ротација.

Транслација

Треба да е даден детален опис за поместувањето.

Тоа често се претставува како растојание надесно (или налево) и растојание нагоре (или надолу).

За насоките можеме да користиме и запис со вектор, како на пример: (x, y)

Транслација за вектор (x, y) значи поместување за x единици надесно или налево и за y единици нагоре или надолу.

Ако вредноста на x е позитивна, тогаш поместувањето е надесно.

Ако вредноста на x е негативна, тогаш поместувањето е налево.

Ако вредноста на y е позитивна, тогаш поместувањето е нагоре.

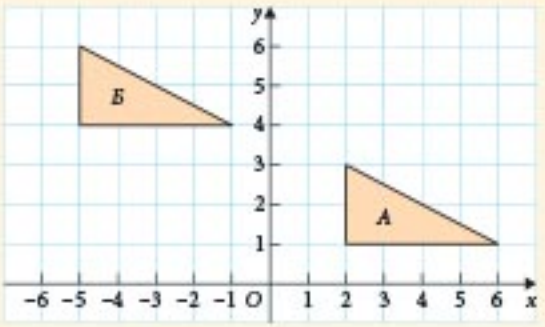
Ако вредноста на y е негативна, тогаш поместувањето е надолу.

На пример, поместување за вектор $(-4, -5)$ значи поместување за 4 единици налево и за 5 единици надолу.

Пример 2

На цртежот се прикажани 2Д-формите *А* и *Б*.

Детално опиши ја трансформацијата што ја пресликува 2Д-формата *А* во 2Д-формата *Б*.



2Д-формата *Б* е складна со 2Д-формата *А* и го има истиот изглед.

Значи имаме транслација во координатниот систем.

2Д-формата *Б* се добива со поместување на 2Д-формата *А* за 7 квадратчиња налево и 3 квадратчиња нагоре.

Трансформацијата од *А* во *Б* е транслација, 7 квадратчиња налево и 3 квадратчиња нагоре.

Транслација за вектор (−7, 3) е вториот детален опис на трансформацијата.

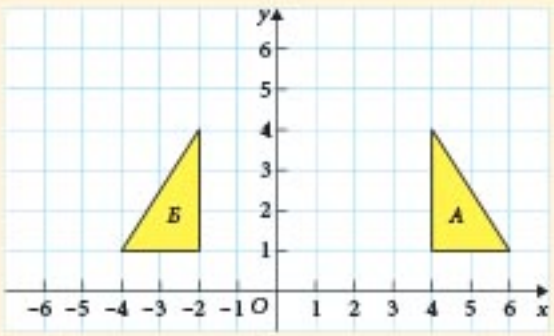
Пример 3

Нацртај квадратна координатна мрежа со вредности на x од −6 до 6 и вредности на y од 0 до 6.

Нацртај триаголник А со темиња во (4, 1), (4, 4) и (6, 1).

Нацртај втор триаголник Б со темиња во (−2, 1), (−2, 4) и (−4, 1).

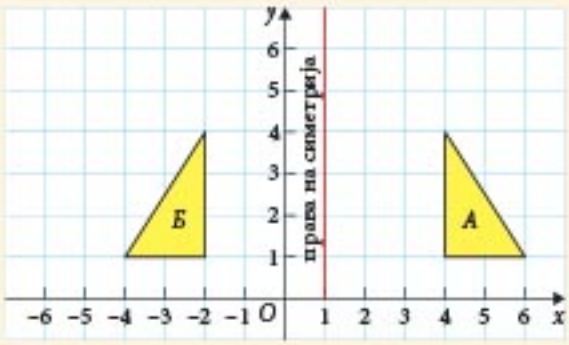
Детално опиши ја трансформацијата од триаголникот А во триаголникот Б.



Прво ги цртаме координатните оски.

Ги означуваме и ги поврзуваме дадените точки за да го добиеме триаголникот А.

Ги означуваме и ги поврзуваме дадените точки за да го добиеме триаголникот Б.



Триаголниците се складни, но едниот е симетричен на другиот во однос на една права.

Тоа е правата на симетрија – повлечена е на средина помеѓу нив.

Правата на симетрија е прикажана со црвена боја на цртежот.

Равенката на правата на симетрија е $x = 1$.

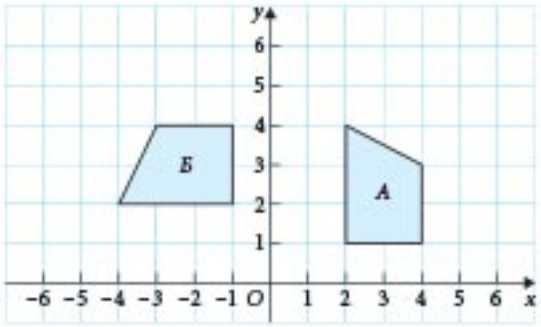
Потсети се на равенка на права.

Трансформацијата од А во Б е осна симетрија во однос на правата $x = 1$.

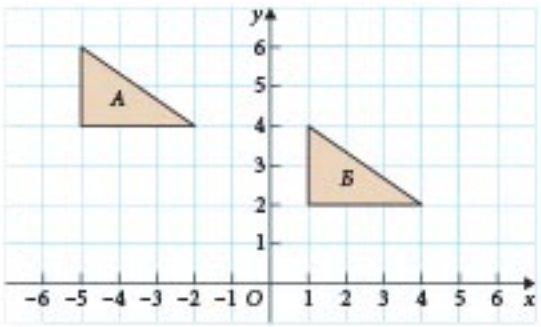
Задачи

Во задачите од **1** до **9** детално опиши ја трансформацијата од 2Д-форма *А* во 2Д-форма *Б*.

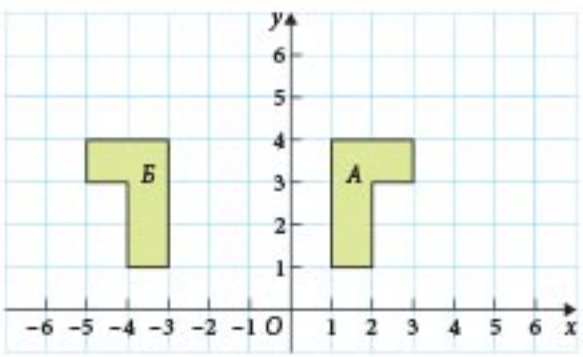
1.



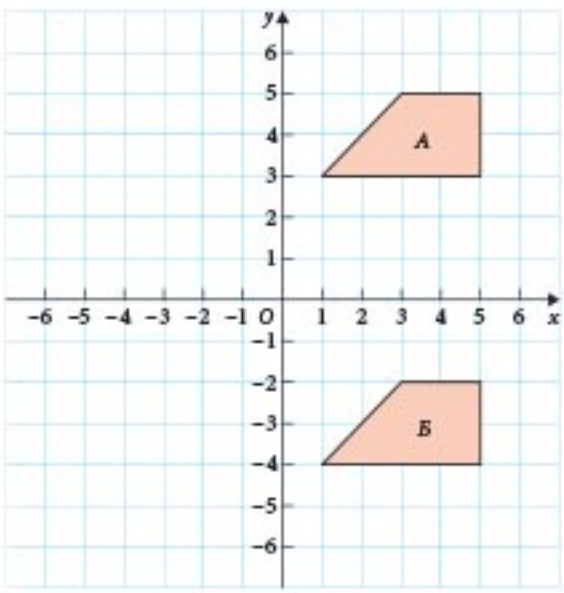
2.



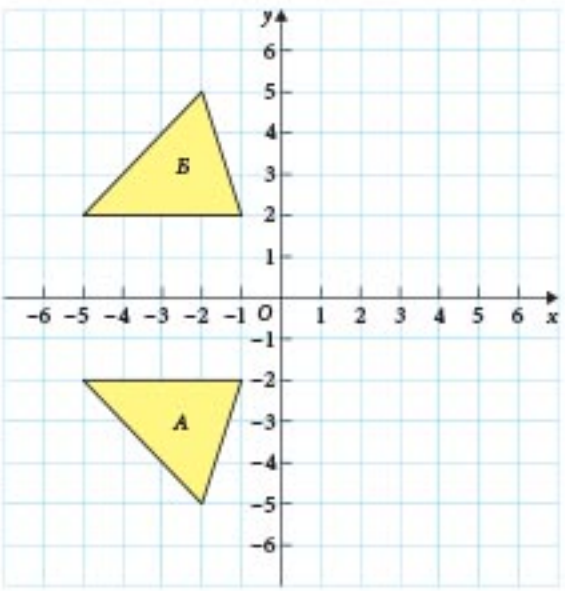
3.



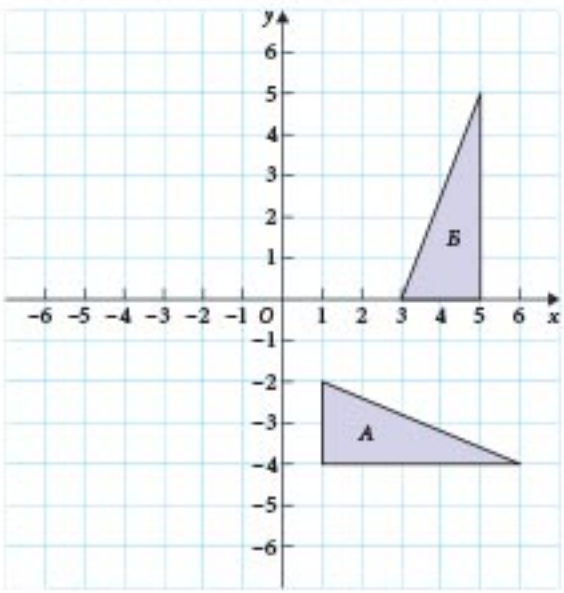
4.



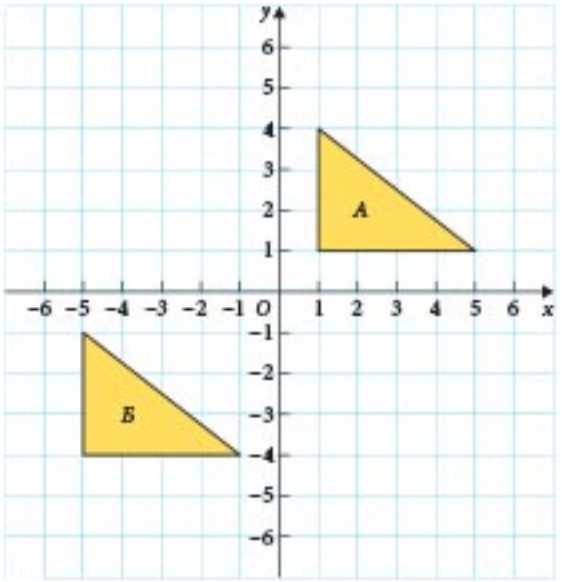
5.



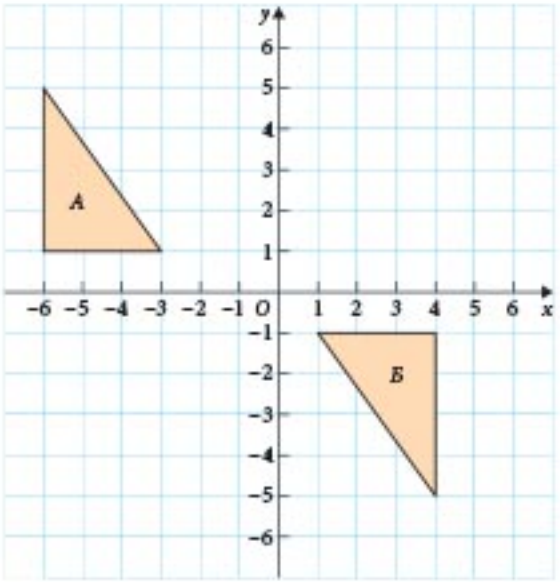
6.



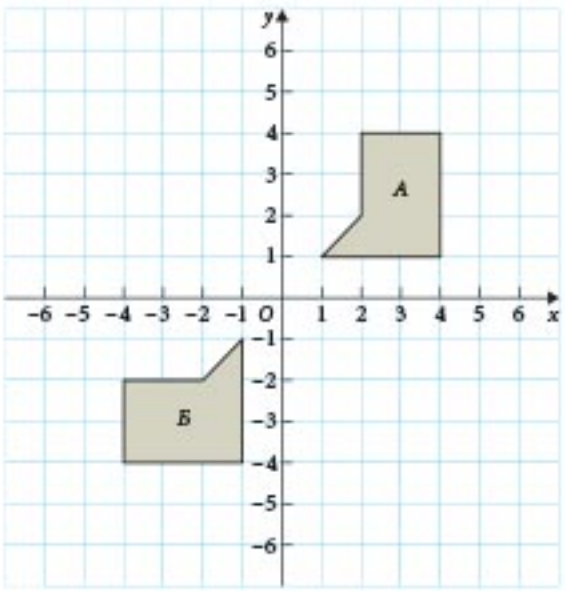
7.



8.



9.



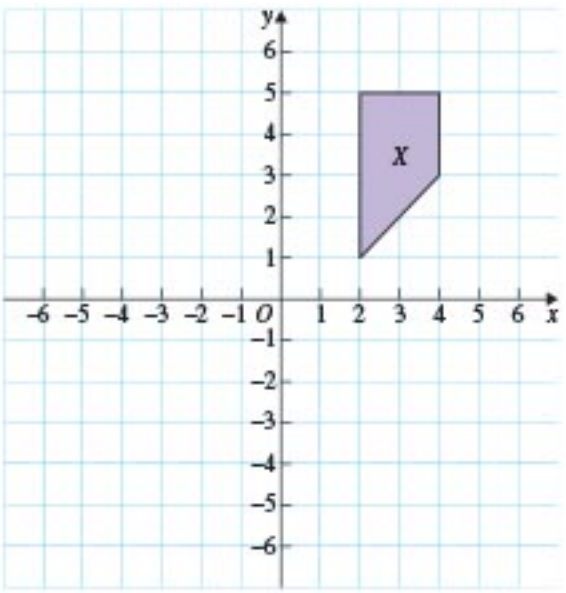
10. Прецртај го цртежот во тетратка со квадратчиња.

а) Најди ја 2Д-формата Y што е симетрична на 2Д-формата X во однос на *y*-оската.

б) Ротирај ја 2Д-формата *Y* за 180° околу точката (0, 1). Означи ја сликата со *Z*.

Користи прозирна хартија за прецртување за да ја нацрташ ротацијата.

в) Опиши ја детално трансформацијата од *X* во *Z*.



11. **а)** Нацртај квадратна координатна мрежа со вредности на оските од −6 до 6.

б) Нацртај 2Д-форма А во форма на буквата L со означени темиња во (4, 1), (4, 4), (5, 4), (5, 2), (6, 2) и (6, 1).

в) Најди ја 2Д-формата Б што е симетрична на 2Д-формата А во однос на x-оската.

г) Најди ја 2Д-формата В што е симетрична на 2Д-формата *Б* во однос на правата $x = 1$.

д) Изврши транслација на В за 5 квадратчиња нагоре. Означи ја новата 2Д-форма со Г.

ѓ) Детално опиши единствена трансформација што директно ја трансформира А во Г.

Користи прозирна хартија за прецртување.

12. Со инверзна трансформација сликата се трансформира назад во оригиналот.

На пример, инверзна трансформација на транслацијата за 5 квадратчиња надесно е транслацијата за 5 квадратчиња налево.

Детално опиши ја инверзната трансформација на секоја од следниве трансформации.

а) Осна симетрија во однос на x-оската.

б) Транслација за векторот (3, −4).

в) Ротација за 180° околу точката (0, 0).

г) Осна симетрија во однос на правата $y = -x$.

д) Ротација за 90° во насока на движење на стрелките на часовникот околу точката (0, 0).

ѓ) Транслација за векторот (0, 4).

Нацртај цртеж за да ги одредиш инверзните трансформации.

3.5 Зголемување и сличност

Слични 2Д-форми

Со транслација, осна симетрија и ротација 2Д-формите ја задржуваат истата големина и форма.

За разлика од нив, со трансформацијата зголемување се менува големината на оригиналот.

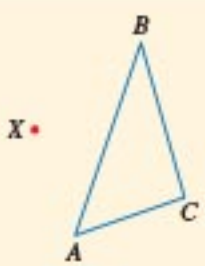
По зголемувањето, сликата има еднакви агли како оригиналот, но се менува големината на 2Д-формата. Овие 2Д-форми велиме дека се слични.

Накратко, оригиналот и сликата имаат иста форма, но различни големини.

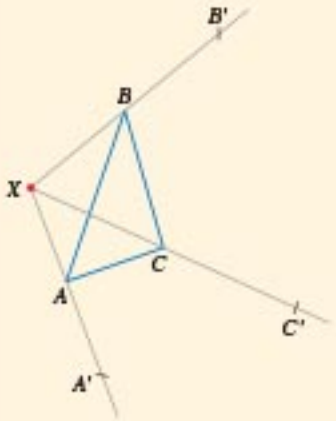
Преку следниве два примера ќе се потсетиме како се цртаат слични 2Д-форми при дадени центар на зголемување и коефициент на сличност.

Пример 1

Прецртај го цртежот во тетратка.



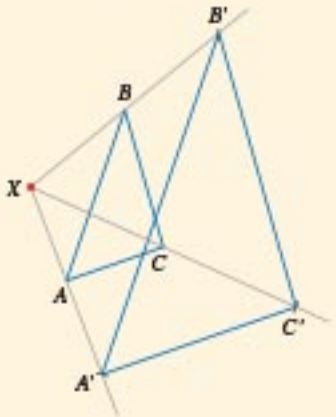
Зголеми го триаголникот ABC со коефициент 2 и со центар на зголемување во точката X.



Прво цртаме прави од X низ секое теме од триаголникот.

Ја означуваме точката A', така што $\overline{XA'} = 2 \cdot \overline{XA}$.

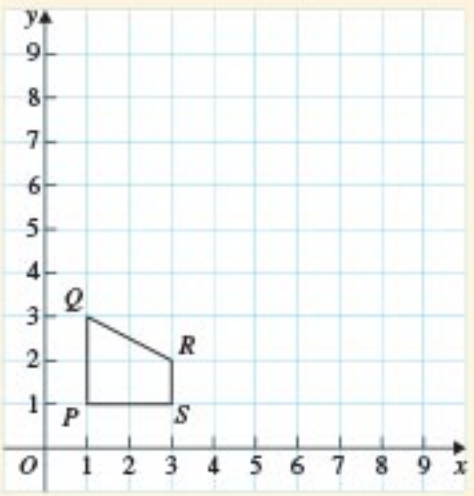
Ги означуваме точките B' и C', така што $\overline{XB'} = 2 \cdot \overline{XB}$ и $\overline{XC'} = 2 \cdot \overline{XC}$.



На крајот, ги поврзуваме трите точки A', B' и C' за да го формираме новиот триаголник.

Пример 2

Прецртај го цртежот во тетратка со квадратчиња.

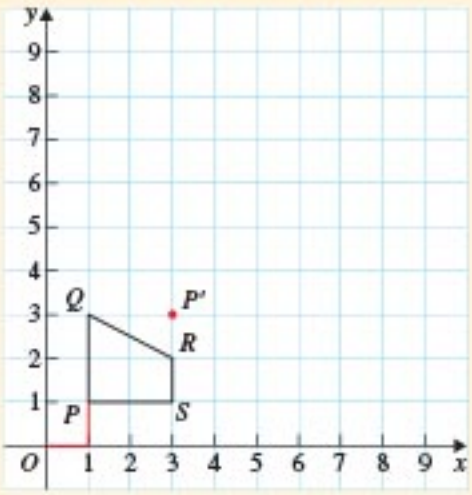


а) Зголеми го $PQRS$ со коефициент 3 и центар $(0, 0)$. Сликата означи ја со $P'Q'R'S'$.

б) Измери ги страните и пресметај:

I $\dfrac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}}$ II $\dfrac{\overline{Q'S'}}{\overline{QS}}$

а)



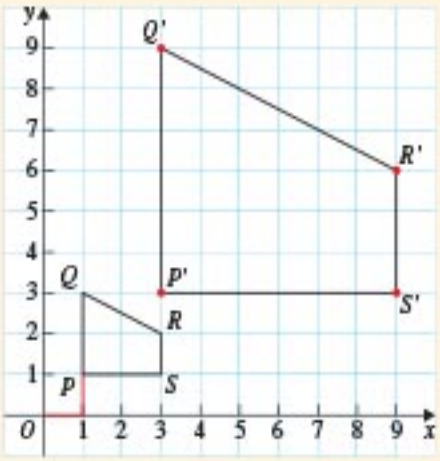
Кога 2Д-формата е нацртана на квадратна координатна мрежа или на лист со квадратчиња, полесно можеме да го нацртаме зголемувањето без да цртаме прави.

Темето P е 1 квадратче дијагонално нагоре од центарот на сличност $(0, 0)$.

Го множиме бројот на квадратчиња со коефициентот на сличност.

Сликата на ова теме ќе биде 3 квадратчиња дијагонално нагоре.

На цртежот, сликата на P е означена со P'.



Ја повторуваме истата постапка и за точките Q, R и S за да ги најдеме положбите на точките Q', R' и S'.

Ги поврзуваме четирите добиени точки и ја добиваме зголемената слика на 2Д-формата $PQRS$.

б) I Ако секое квадратче има страна 1 cm, тогаш $\overline{P'Q'} = 6$ cm, а $\overline{PQ} = 2$ cm.

Имаме $\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = \frac{6}{2} = 3$

II $\overline{Q'S'} = 8{,}49$ cm и $\overline{QS} = 2{,}83$ cm Ги мериме дијагоналните прави.

$\frac{\overline{Q'S'}}{\overline{QS}} = \frac{8{,}49}{2{,}83} = 3$

Решението може и да не биде точно 3 ако мерењето не е прецизно.

Опишување сличност

Од решението под **б)** во претходниот пример извлекуваме општ заклучок.

Размерот на соодветните должини на сликата и на оригиналот е еднаков со коефициентот на сличност.

Коефициентот на сличност можеме да го пресметаме со мерење на две соодветни должини и одредување на нивен количник.

За да го најдеме центарот на зголемување, треба да нацртаме прави низ соодветните темиња на двете 2Д-форми.

Центарот на зголемување е во пресечната точка на тие прави.

Да разгледаме како треба да изгледа детални опис на зголемувањето.

Зголемување

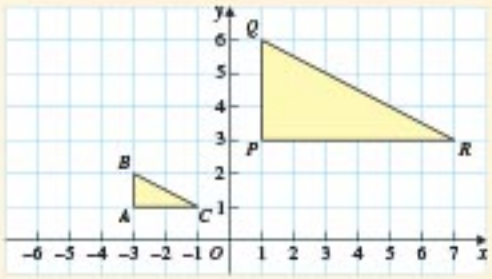
Оваа трансформација се дефинира со:

– коефициент на сличност, што е број;

– центар на зголемување, што може да биде зададен како точка со координати.

Пример 3

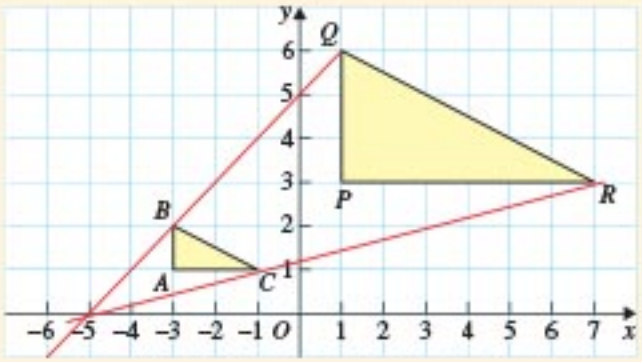
Детално опиши ја трансформацијата од триаголникот ABC во триаголникот PQR.



$\overline{PQ}$ и $\overline{AB}$ се соодветни страни.

$\overline{PQ} : \overline{AB} = 3 : 1 = 3$

Коефициентот е 3.



Прво го наоѓаме коефициентот.

Го наоѓаме центарот на зголемување.

Цртаме права низ двете соодветни темиња, Q и B.

Центарот на зголемување се наоѓа некаде на оваа права.

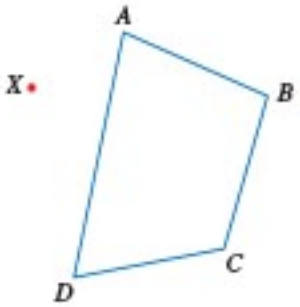
Истото го повторуваме за другиот пар соодветни темиња.

Двете прави се сечат во точката $(-5, 0)$, значи таа точка е центар на зголемувањето.

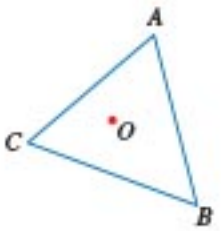
Задачи

За задачите **1** и **2** цртежите прецртај ги во тетратка.

1. Зголеми го $ABCD$ со коефициент 2 и центар X.

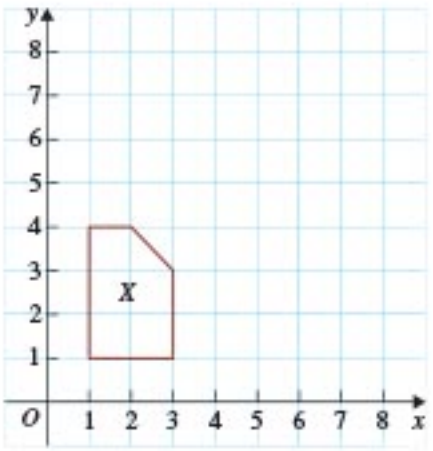


2. Зголеми го ABC со коефициент 3 и центар O.

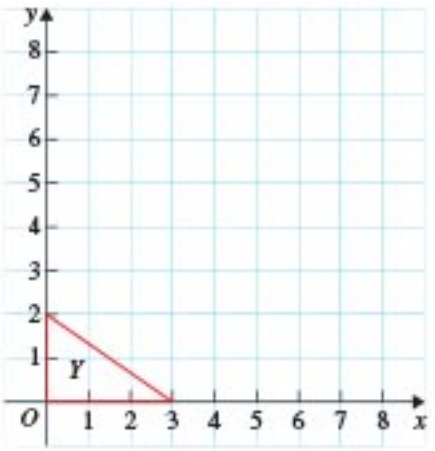


Во задачите **3**, **4** и **5**, прецртај ги цртежите во тетратка.

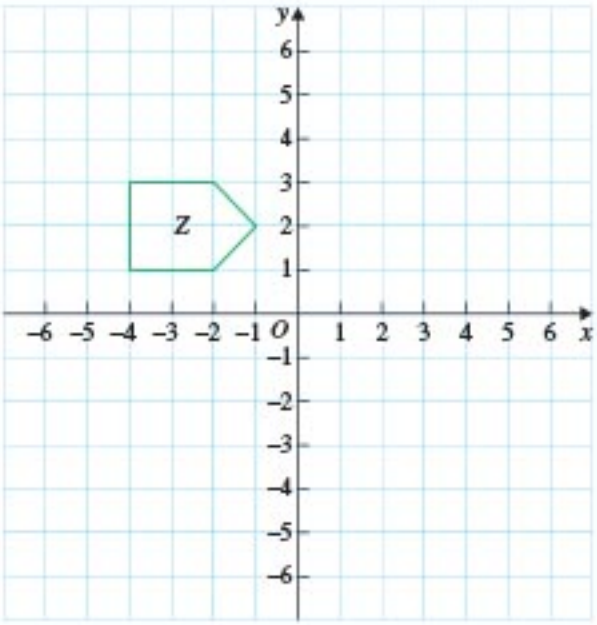
3. Зголеми ја 2Д-формата X со коефициент 2 и центар $(0, 0)$.



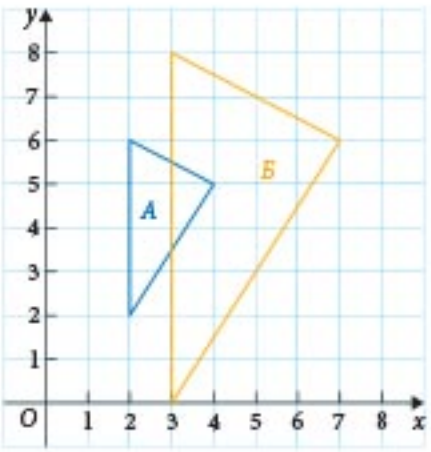
4. Зголеми ја 2Д-формата Y со коефициент 3 и центар $(0, 0)$.



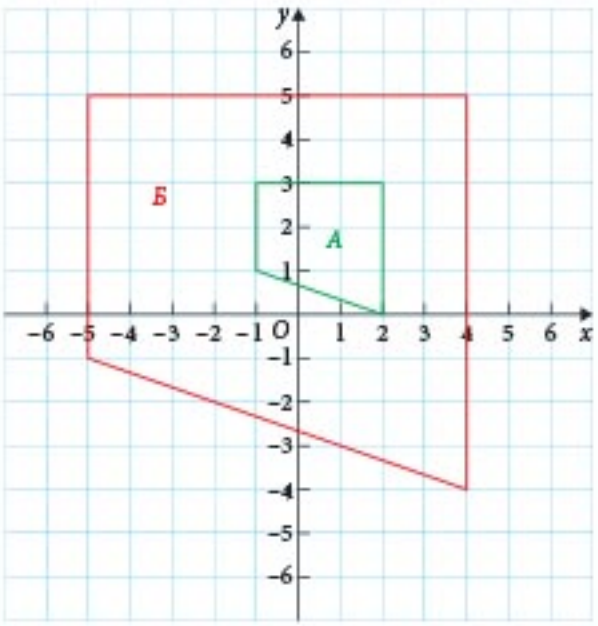
5. Зголеми ја 2Д-формата Z со коефициент 3 и центар $(-5, 4)$.



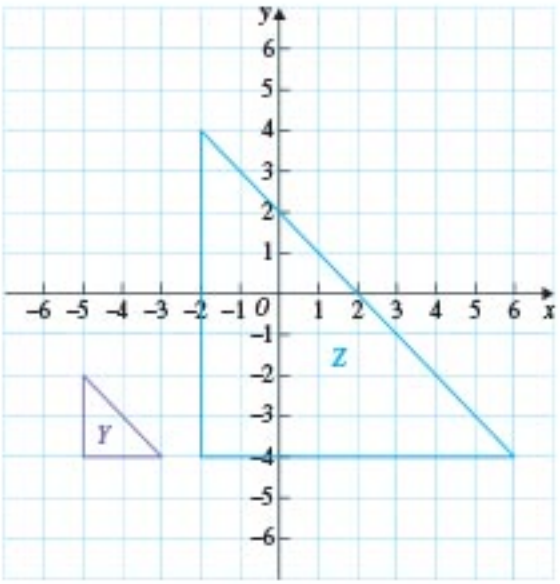
6. Детално опиши ја трансформацијата од 2Д-формата А во 2Д-формата *Б*.



7. Детално опиши ја трансформацијата од 2Д-формата *А* во 2Д-формата *Б*.



8. Детално опиши ја трансформацијата од 2Д-формата Y во 2Д-формата Z.



9. **а)** Нацртај координатен систем со вредности од −6 до 6 на секоја од двете координатни оски.

б) Означи ги точките во (2, 3), (3, 6) и (3, 3). Поврзи ги за да формираат триаголник. Означи го триаголникот Т.

в) Зголеми го Т со коефициент 2 и центар на зголемување (5, 6). Означи го новиот триаголник со U.

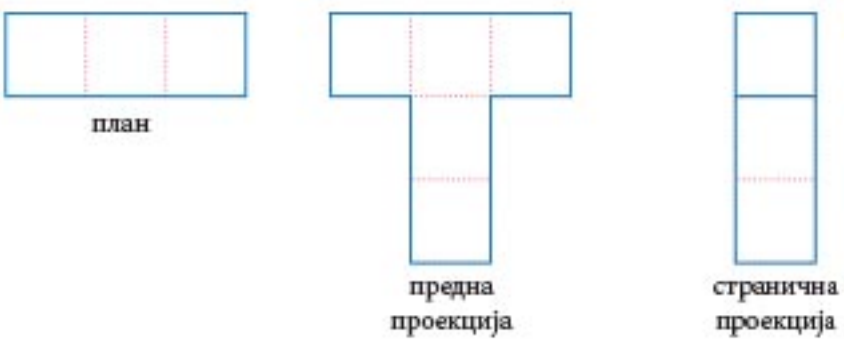
г) Зголеми го U со коефициент 2 и центар на зголемување (3, 6). Означи го новиот триаголник со V.

д) Детално опиши ја единствената трансформација од триаголникот Т во триаголникот V.

Трансформацијата е зголемување. Нацртај ги правите за да го најдеш центарот на зголемувањето.

Задачи за повторување

1. На цртежот се прикажани план и две проекции на 3Д-форма.

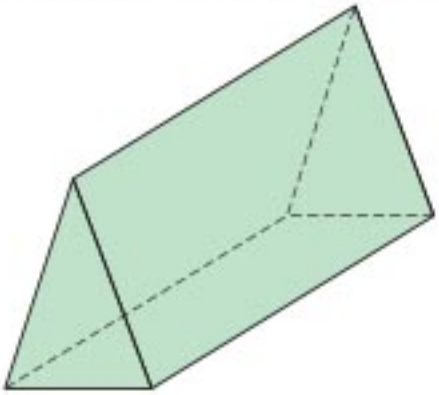


Нацртај ја 3Д-формата на изометриска хартија.

2. Нацртај план и проекција на дадената 3Д-форма.



3. **а)** На цртежот е прикажана призма со основа рамнокрак триаголник.

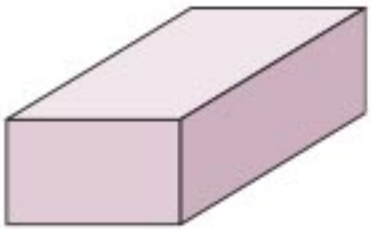


Прецртај го цртежот и нацртај рамнина на симетрија за оваа 3Д-форма.

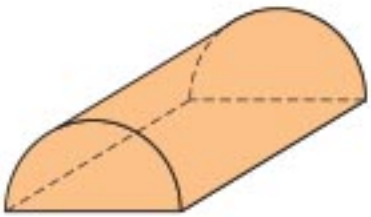
б) Одреди колку вкупно рамнини на симетрија има дадената 3Д-форма.

4. Пресметај колку рамнини на симетрија имаат овие 3Д-форми:

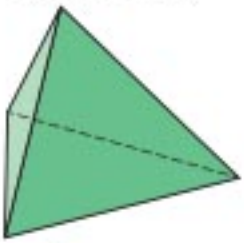
а) квадар



б) призма со основа полукруг



в) правилна триаголна пирамида (пирамида со основа рамностран триаголник)



5. Дадениот триаголник има страни со должини 4,5 cm, 2,5 cm и 4 cm.

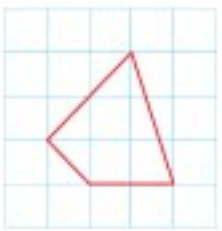
Прецртај го триаголникот во тетратка со квадратчиња.

Нацртај тесалација од триаголникот.



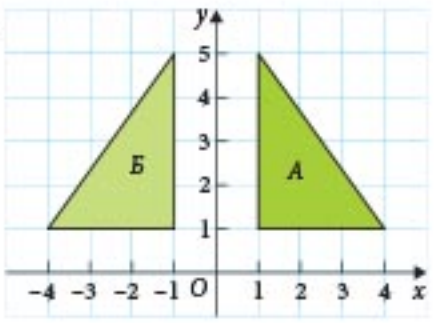
6. Прецртај го четириаголникот во тетратка со квадратчиња.

Нацртај тесалација од дадениот четириаголник.

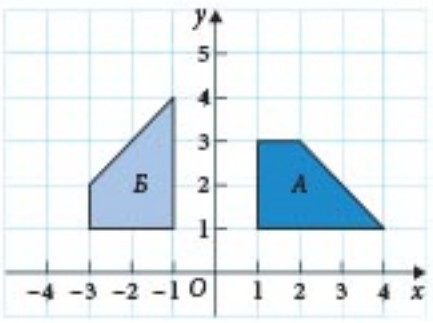


Во задачите од 7 до 14, целосно опиши ја трансформацијата со која 2Д-формата А се пресликува во 2Д-формата Б.

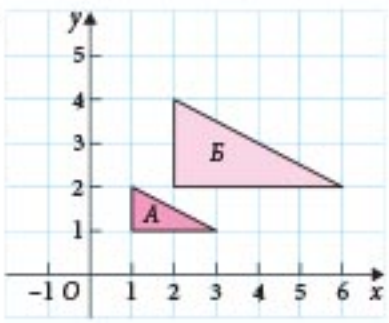
7.



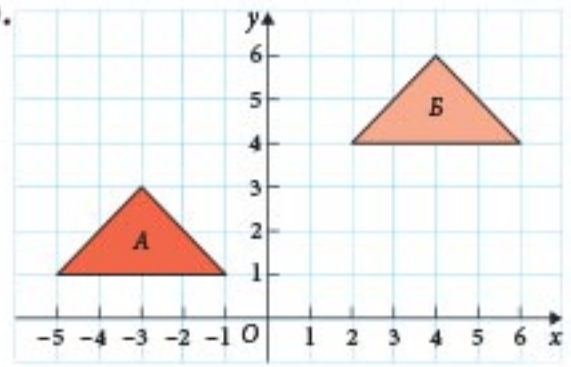
8.



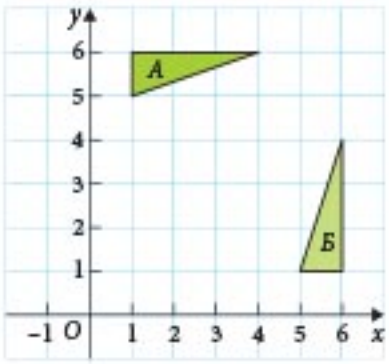
9.



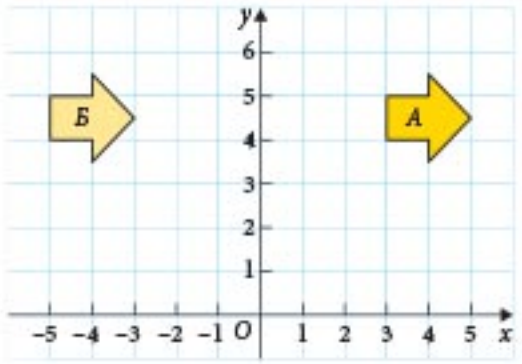
10.



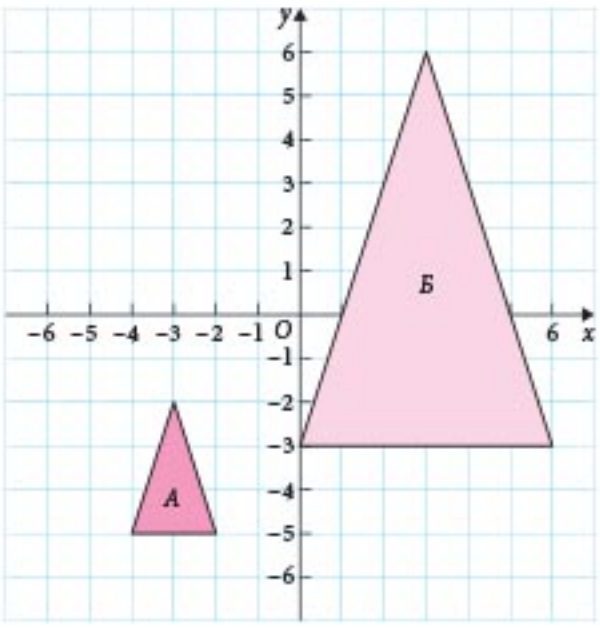
11.



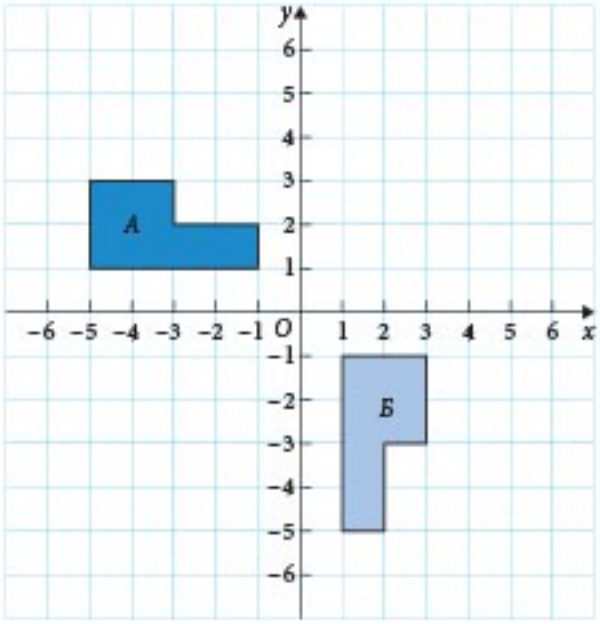
12.



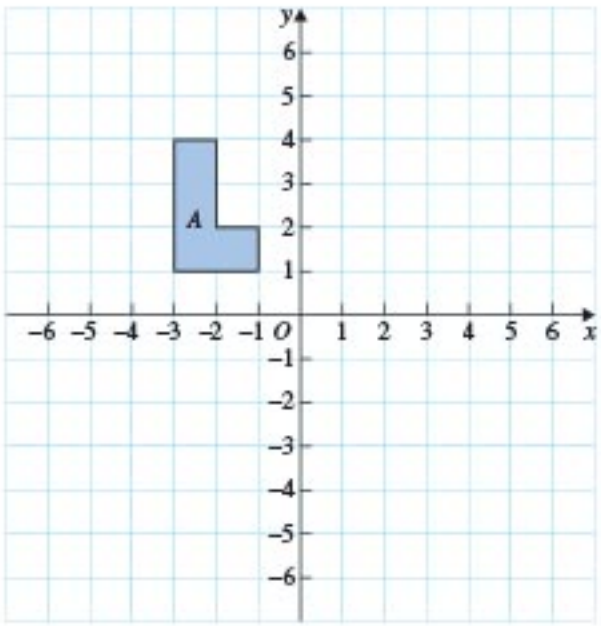
13.



14.



15. Прецртај го цртежот во тетратка со квадратчиња.



а) Ротирај ја 2Д-формата А за 180° околу (1, 0).

Означи ја новата 2Д-форма со Б.

б) Најди ја симетричната 2Д-форма на 2Д-формата Б во однос на y-оската.

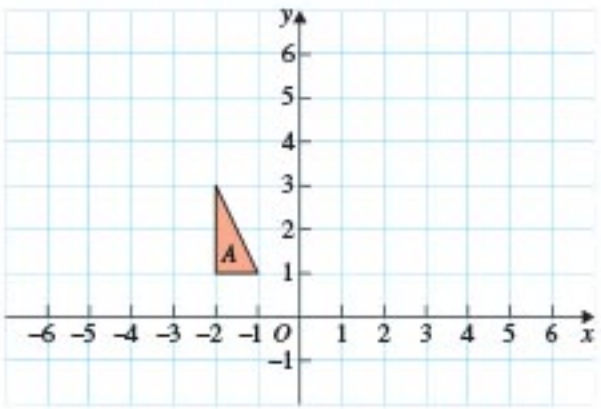
Означи ја новата 2Д-форма со В.

в) Изврши транслација на 2Д-формата В за векторот (2, −2).

Означи ја новата 2Д-форма со Г.

г) Детално опиши ја единствената трансформација од 2Д-формата Г во 2Д-формата А.

16. Прецртај го цртежот во тетратка со квадратчиња.



а) Зголеми го триаголникот А со коефициент 2 и центар (−4, 1).

Означи ја новата 2Д-форма со Б.

б) Најди ја сликата на триаголникот Б при транслација за векторот (2, 1).

Означи ја новата 2Д-форма со В.

в) Детално опиши ја единствената трансформација од А во В.

4 Мерење и решавање проблеми

Наставни цели

- Претвора една мерна единица во друга, на пример мерна единица за плоштина mm^2 и cm^2, cm^2 и m^2 и мерна единица за волумен, на пример mm^3 и cm^3, cm^3 и m^3; го знае и користи односот $1\ cm^3 = 1\ ml$.
- Знае дека земјината површина се мери во хектари (ha) и дека $1\ ha = 10000\ m^2$; претвора хектари во квадратни метри.
- Решава проблеми поврзани со периметар и плоштина на круг, вклучувајќи и користење на копчето π на калкулатор.
- Заокружува броеви до одреден број децимални места или одреден број значајни цифри; користи заокружување за да дојде до решение на проблем до одреден степен на точност.
- Решава проблеми поврзани со мерење во различни контексти.

4.1 Претворање мерни единици

Префикси за мерни единци

Систем од мерни единици содржи мерни единици за многу различни величини.

Метрички систем или Меѓународен систем на мерни единици (SI) е систем од мерки што се заснова на декадниот броен систем.

На пример, сила (њутн), јачина на електрична струја (ампер) и фреквенција (херц).

Досега се запознавме со мерните единици за должина (**метар**), за маса (**грам**) и за волумен на течност (**литар**).

Поголемите и помалите мерки ги именуваме со додавање префикс на мерната единица. Оваа табела прикажува некои префикси за именување мерки поголеми од основната мерна единица.

	дека	хекто	кило	мега	гига	тера	пета
10^0	10^1	10^2	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}
еден	десет	сто	илјада	милион	милијарда	билион	билијарда

На пример, мерна единица за моќност е ват.

Еден милион вати се еднакви на мегават.

Следната табела прикажува некои префикси за именување мерки помали од основната мерна единица.

	деци	санти	мили	микро	нано	пико	фемто
10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}
еден	десеттина	стотина	илјадити дел	милионити дел	милијардити дел	билионити дел	билијардити дел

Мерна единица за енергија е џул.

Еден милијардити дел од џулот е наноџул.

Најчесто користените префикси се **кило**, **санти** и **мили**.

Пример 1

Дополни ги следните тврдења.

а) 2790 сантиметри = ... метри.

б) 5,8 литри = ... милилитри.

в) 867 килограми = ... тони.

а) $1\,\text{cm} = \frac{1}{100}\,\text{m}$

$2790\,\text{cm} = \frac{1}{100} \cdot 2790\,\text{m}$

$2790\,\text{cm} = 27{,}9\,\text{m}$

Множење со $\frac{1}{100}$ е исто како и делење со 100.

$2790 : 100 = 27{,}9$ m

б) $1\,\text{l} = 1000\,\text{ml}$

$5{,}8\,\text{l} = 1000 \cdot 5{,}8\,\text{ml}$

$5{,}8\,\text{l} = 5800\,\text{ml}$

в) $1000\,\text{kg} = 1$ тон

1 тон = 1000 килограми.

$1\,\text{kg} = \frac{1}{1000}$ тони

$867\,\text{kg} = \frac{1}{1000} \cdot 867$ тони

$867\,\text{kg} = 0{,}867$ тони

Пример 2

Хасан има дрвена греда долга 2,4 метра.

Сака да ја подели на следниот начин за да прави мали играчки.

I 4 парчиња долги по 125 mm

II 7 парчиња долги по 9,5 cm

III 2 парчиња долги по 0,45 m

а) Пресметај ја вкупната должина што треба да ја пресече.

Решенијата запиши ги во сантиметри.

б) Колкав дел од дрвото ќе остане откако Хасан ќе ги пресече сите потребни парчиња?

а) I $4 \cdot 125 = 500$

$500\,\text{mm} = 50\,\text{cm}$

Четирите парчиња имаат вкупна должина од 50 cm.

II $7 \cdot 9{,}5 = 66{,}5$

Седумте парчиња имаат вкупна должина од 66,5 cm.

III $2 \cdot 0{,}45 = 0{,}9$

$0{,}9\,\text{m} = 90\,\text{cm}$

Двете парчиња имаат вкупна должина од 90 cm.

$50 + 66{,}5 + 90 = 206{,}5$

Вкупната должина што треба да ја пресече Хасан е 206,5 cm.

б) $2{,}4\,\text{m} = 240\,\text{cm}$

$240 - 206{,}5 = 33{,}5$

Откако ја пресекол потребната должина, останале уште 33,5 cm од дрвената греда.

Задачи

1. Препиши ги и дополни ги следните тврдења.

а) 84,9 километри = ... метри.

б) 129 сантиметри = ... милиметри.

в) 37,5 тони = ... килограми.

г) 8436 сантиметри = ... метри.

д) 5,9 метри = ... милиметри.

ѓ) 21434 милилитри = ... литри.

е) 125 килограми = ... грама.

ж) 8030 метри = ... километри.

2. Избери правилна мерна единица за да ги дополниш следните тврдења.

а) Калкулаторот е долг приближно 16. .....

б) Шолја кафе собира околу 300 .....

в) Креветот е долг околу 2 .....

г) Лаптопот има маса приближно 2,25 .....

д) Растојанието од Скопје до Прилеп е околу 135 .....

ѓ) Спојувалката за хартија е долга околу 30 .....

3. На десната страна е прикажан рецепт за подготвување лепињи.

1 чаша брашно има маса 125 грама.

1 ml вода има маса 1 грам.

Пресметај ја вкупната маса на сите состојки во рецептот.

Решението запиши го во килограми.



Рецепт

150 g путер
175 g шеќер
4 чаши брашно
25 g сол
14 g квасец
200 ml вода

4. Една монета има маса 2,268 грама.

Елена нашла торбичка со 960 такви монети.

а) Пресметај ја вкупната маса, во килограми, на монетите во торбичката.

Заокружи го решението на 2 децимални места.

Прво пресметај ја вкупната маса во грамови.

б) Дебелината на една монета е 1,35 милиметри.

Елена се обидува да ги нареди монетите една на друга.

Колкава ќе биде висината на наредните монети?

Запиши го решението во метри.

Прво пресметај ја вкупната висина во метри.



5. **а)** Пресметај колку сантиметри има во 1 километар.

Прво претвори 1 km во метри.

б) Која мерна единица е еднаква на 1000000000 милиграми.

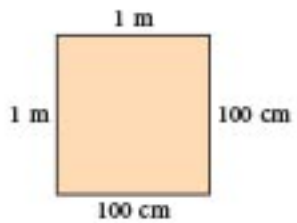
4.2 Плоштина

Да разгледаме квадрат со страна 1 метар.

Неговата плоштина е $1\ \text{m} \cdot 1\ \text{m} = 1\ \text{m}^2$.

Страната на квадратот можеме да кажеме дека е 100 сантиметри.

Тогаш плоштината е $100\ \text{cm} \cdot 100\ \text{cm} = 10000\ \text{cm}^2$.



Значи, $\mathbf{1\ m^2 = 10000\ cm^2}$.

Ако ја измериме страната на квадратот во милиметри, таа е долга 1000 mm.

Тогаш плоштината е $1000\ \text{mm} \cdot 1000\ \text{mm} = 1000000\ \text{mm}^2$.

Значи, $\mathbf{1\ m^2 = 1000000\ mm^2}$.

За да претвораме мерни единици за плоштина една во друга, **треба да го квадрираме коефициентот за претворање должини.**

На пример, $1\ \text{km} = 1000\ \text{m}$.

Затоа, $1\ \text{km}^2 = 1000\ \text{m} \cdot 1000\ \text{m} = 1000000\ \text{m}^2$.

Пример 1

Еден лист хартија има плоштина 220 cm^2.

Претвори ја плоштината во mm^2.

Кога претвораме мерни единици за плоштина една во друга, го квадрираме коефициентот за претворање должина.

1 cm = 10 mm Ова е коефициент за претворање должина.

$1\ cm^2 = 10\ mm \cdot 10\ mm = 100\ mm^2$ Ова е коефициент за претворање плоштина.

$220\ cm^2 = 220 \cdot 100\ mm^2 = 22000\ mm^2$

Пример 2



Една парцела има плоштина 0,3 km^2.

Претприемачот сака да гради куќи на таа парцела.

Секоја куќа треба да се изгради на поединечни парцели од 600 m^2.

а) Претвори ги 0,3 km^2 во m^2.

б) Пресметај колку вкупно куќи можат да се изградат на целата парцела.

а) 1 km = 1000 m Ова е коефициент за претворање должина.

$1\ km^2 = 1000\ m \cdot 1000\ m = 1000000\ m^2$ Ова е коефициент за претворање плоштина.

$0{,}3\ km^2 = 0{,}3 \cdot 1000000\ m^2 = 300000\ m^2$

б) 300000 : 600 = 500

Можат да се изградат вкупно 500 куќи на целата парцела.

Хектари

Мерење земјиште

Хектар е мерна единица за мерење плоштина на земјиште.

Во најголем број држави се користи мерна единица хектар, но сè уште има држави во кои се користи и мерната единица акр.

Во минатото се сметало дека мерна единица еден акр одговара на плоштината што може да биде изорана во текот на еден ден со еден пар волови.



Еден акр е приближно еднакво на површина од 0,4 хектари, односно околу 4000 m^2.

Акрите сè уште се користат во некои држави, меѓу кои се САД, Пакистан, Индија и Австралија.

Плоштината од 0,3 km² во Пример 2 е доволна за 500 куќи.

Тоа покажува дека 1 km² е многу голема површина.

Постои потреба за мерна единица за плоштина помеѓу 1 m² и 1 km².

Таква мерна единица е **хектар (ha)**.

1 ha = 10000 m²

Хектарот се користи за плоштини на ниви, полиња, паркови и слично.

Пример 3

Претвори:

а) 4,5 ha во m² **б)** 150000 m² во ha

а) 1 ha = 10000 m²

4,5 ha = 4,5 · 10000 m² = 45000 m²

б) 10000 m² = 1 ha

$150000\ m^2 = \frac{150000}{10000}\ ha = 15\ ha$

Кога претвораме од поголема мерна единица во помала мерна единица, тогаш множиме.

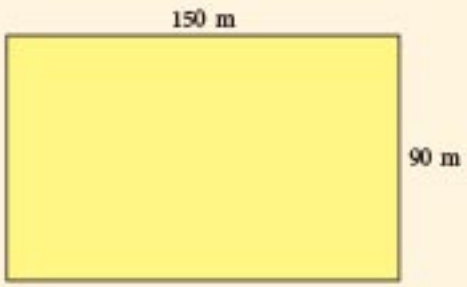
Кога претвораме од помала мерна единица во поголема мерна единица, тогаш делиме.

Пример 4

На цртежот е претставен план на една нива.

а) Пресметај ја плоштината во m².

б) Пресметај ја плоштината во хектари.



а) Плоштина на правоаголник = должина · ширина.

Плоштина = 150 m · 90 m

Плоштина = 13500 m²

б) 1 ha = 10000 m²

$13500\ m^2 = \frac{13500}{10000}\ ha = 1{,}35\ ha$

Задачи

1. Препиши ги и дополни ги следниве тврдења.

а) 1 m² = ...cm² **б)** 1 cm² = ... mm²

в) 1 km² = ... m² **г)** 1 ha = ... m²

2. Претвори во cm².

а) 3 m² **б)** 2,8 m² **в)** 400 mm² **г)** 1000 mm²

д) 0,5 m² **ѓ)** 20 mm² **е)** 100 m² **ж)** 32 mm²

3. Претвори во mm^2.

а) $4\ cm^2$ **б)** $7{,}5\ cm^2$ **в)** $2\ m^2$ **г)** $6{,}8\ m^2$

4. Претвори во m^2.

а) $3\ km^2$ **б)** $8000\ cm^2$ **в)** $9000000\ mm^2$ **г)** $7{,}2\ km^2$

5. Претвори во m^2.

а) $4\ ha$ **б)** $12\ ha$ **в)** $7{,}5\ ha$ **г)** $2{,}35\ ha$

6. Претвори во хектари.

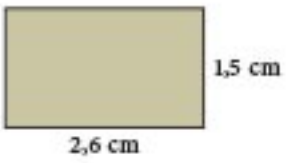
а) $60000\ m^2$ **б)** $150000\ m^2$ **в)** $85000\ m^2$ **г)** $5000\ m^2$

7. Пресметај ги плоштините на правоаголниците.

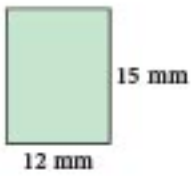
а)



б)



в)



Решенијата запиши ги во: **i** cm^2 **ii** mm^2

8. Едно игралиште има димензии 165 метри и 88 метри.

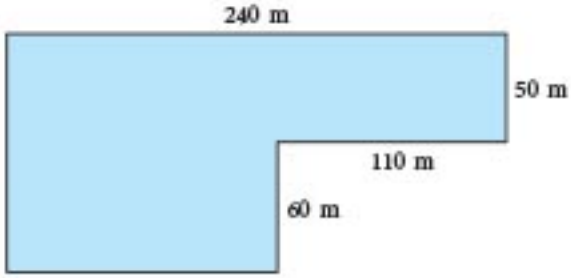
Пресметај ја плоштината на игралиштето во хектари.

9. Одгледувачот на коњи пресметал дека за секое животно му се потребни 4000 m^2 простор во полето.

Пресметај колку коњи би можеле да се чуваат во поле со плоштина од 2 хектари.

10. На цртежот е претставена голема нива.

Таа е составена од две правоаголни ниви.



а) Пресметај ја плоштината на нивата во m^2.

Подели ја нивата на два правоаголника за да ја пресметаш плоштината.

б) Претвори ја плоштината во хектари.

11. Со мала лименка боја може да се обои дрвена површина од $1{,}5\ m^2$.

Селвер има 12 парчиња дрво, од кои секое има форма на правоаголник со димензии 35 cm и 40 cm.

Внимавај, се користат различни мерни единици. Должините се во cm, а плоштината е во m^2.

а) Пресметај ја плоштината на едно парче дрво.

б) Пресметај дали една лименка боја е доволна за да се обојат 12 парчиња дрво.

12. Лист во А4-формат има плоштина што е половина од плоштината на лист во А3-формат.

Лист во А3-формат има плоштина што е половина од плоштината на лист во А2-формат.

Лист во А2-формат има плоштина што е половина од плоштината на лист во А1-формат.

Лист во А1-формат има плоштина што е половина од плоштината на лист во А0-формат.

Лист во А0-формат има плоштина 1 m².

а) Запиши ја како дропка плоштината на листот во А0-формат во однос на плоштината на листот во А4-формат.

б) Пресметај ја плоштината на лист во А4-формат во cm².

Прво претвори ја плоштината на А0 формат во cm².

13. Плоштината на една парцела е 0,3 km².

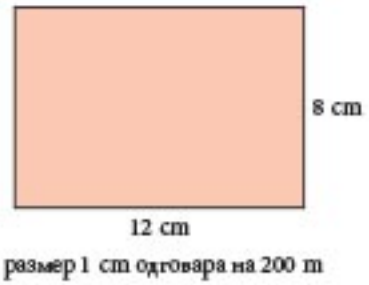
а) Претвори ја плоштината во хектари.

Прво претвори во m².

б) Колку хектари има во 1 km²?

14. Димензиите на шумата прикажана на мапата се 12 cm и 8 cm.

Размерот на мапата е 1 cm = 200 m.



а) Пресметај ја плоштината на шумата на мапата во cm².

б) Пресметај ја вистинската плоштина на шумата во m².

Користи го размерот за да ги претвориш должините во метри пред да ја пресметаш плоштината.

в) Решението запиши го во хектари.

4.3 Круг

Периметар на круг



Во VIII одделение учевме како се пресметува **периметар** на круг, L, ако е познат дијаметарот d или радиусот r.

$L = \pi d$ или $L = 2\pi r$

π (се чита „пи“) е приближно еднакво на 3,142.

На калкулаторите има копче π што попрецизно ја одредува вредноста на π.

На калкулаторот веројатно ќе се добие 3,141592654.

Постојат и уште попрецизни калкулатори.

Пример 1

Пресметај го периметарот на 2Д-формите. Решенијата заокружи ги на 3 значајни цифри.

а) Круг **б)** Полукруг **в)** Четвртина круг







а) Радиусот е 4,6 cm.

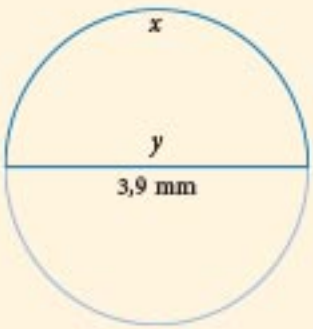
$L = 2 \cdot \pi \cdot 4{,}6$ Ја користиме формулата $L = 2\pi r$.

$= 28{,}90265241$ Пресметано π со калкулатор.

$= 28{,}9$ cm Заокружено на 3 значајни цифри.

б) 2Д-формата е составена од половина круг и дијаметар на тој круг.

Должината на половината круг x е еднаква на половина од периметарот на целиот круг.



$x = \frac{\pi \cdot 3{,}9}{2}$ Бидејќи $\frac{\pi d}{2}$ е половина од периметарот на круг

$x = 6{,}126105675$ Пресметано π со калкулатор.

Вториот дел од 2Д-формата е дијаметарот.

$y = 3{,}9$ mm

Вкупниот периметар $= x + y$

$= 6{,}126105675 + 3{,}9$

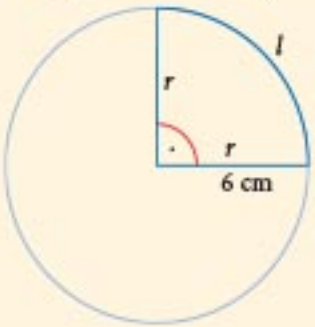
$= 10{,}02610567$

$= 10{,}0$ mm Заокружено на 3 значајни цифри.

в) Оваа 2Д-форма е четвртина од круг.

2Д-формата е составена од четвртина круг ограничен со кружен лак и два радиуса.

Должината на кружниот лак l е еднаква на четвртина од периметарот на кругот.



$l = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6}{4}$ Бидејќи $\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{4}$ е четвртина од периметарот.

$= 9{,}424777961$ Пресметано π со калкулатор.

И двете отсечки се еднакви на радиусот, $r = 6$ cm.

Вкупниот периметар $= l + 2r$

$= 9{,}424777961 + 2 \cdot 6$

$= 21{,}424777961$

$= 21{,}4$ cm Заокружено на 3 значајни цифри.

Плоштина на круг

Формулата за плоштината P на круг со радиус r е:

$\boldsymbol{P = \pi r^2}$

Пример 2

Најди ја плоштината на 2Д-формите од претходниот пример.

а) Радиусот на кругот е 4,6 cm.

$P = \pi \cdot 4{,}6^2$ Од $P = \pi r^2$.

$= 66{,}47610055$ Пресметано π со калкулатор.

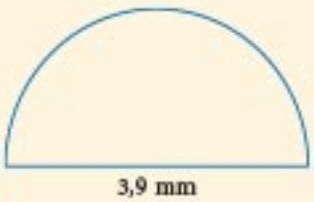
$= 66{,}48$ cm² Заокружено на 2 децимални места.



Мерна единица е cm² бидејќи пресметуваме плоштина.

б) Плоштината на полукругот е половина од плоштината на кругот.

Дијаметарот е 3,9 mm, па радиусот е 3,9 : 2 = 1,95 mm.



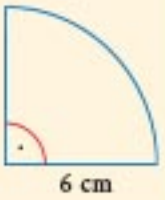
$P = \frac{\pi \cdot 1{,}95^2}{2}$ Половина од плоштината $= \frac{\pi \cdot r^2}{2}$.

$= 5{,}972953033$ Пресметано π со калкулатор.

$= 5{,}97$ mm² Заокружено на 2 децимални места.

в) Плоштината на четвртина круг е плоштината на кругот поделена со 4.

Радиусот е 6 cm.



$P = \frac{\pi \cdot 6^2}{4}$ Четвртина од плоштината $= \frac{\pi \cdot r^2}{4}$

$= 28{,}27433388$ Пресметано π со калкулатор.

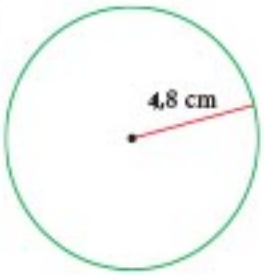
$= 28{,}27\ \text{cm}^2$ Заокружено на 2 децимални места.

Задачи

Во следните задачи заокружи ги решенијата на 3 значајни цифри.

1. Пресметај го периметарот на 2Д-формите:

а)



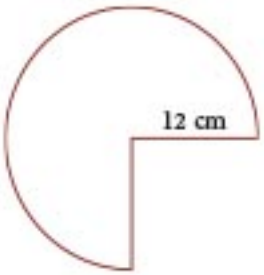
б)



в)

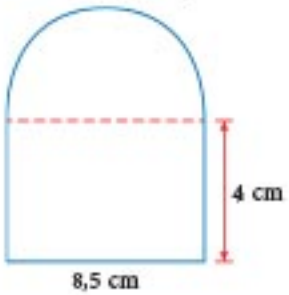


г)



2. Пресметај ја плоштината на секоја од 2Д-формите од претходната задача.

3. Оваа 2Д-форма е составена од правоаголник и полукруг.



Пресметај ги: **а)** плоштината на 2Д-формата

б) периметарот на 2Д-формата.

4. Една градина има форма на квадрат со страна 12 метри.

Таа има кружен тревник што ги допира сите рабови. Во секој агол има цвеќарник. На цртежот е прикажан планот на градината.



а) Пресметај ја плоштината на целата градина.

б) Пресметај ја плоштината на тревникот.

в) Пресметај ја плоштината на еден цвеќарник.

5. Пресметај го дијаметарот на кружница со периметар:

а) 25 cm **б)** 76 mm **в)** 5 m

6. Пресметај го радиусот на кружница со периметар:

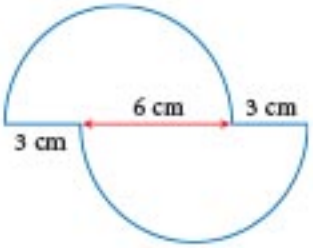
а) 65 cm **б)** 5,9 mm **в)** 2,5 m

7. Логото на една компанија е направено од два полукруга.

а) Пресметај ја плоштината на логото.

б) Пресметај го периметарот на логото.

2Д-формата е составена од два полукруга.

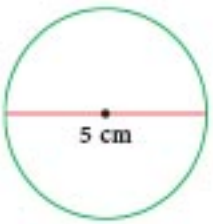


Треба да ги собереш должините на правите линии со должините на лаците.

8. Сите три 2Д-форми прикажани подолу имаат еднакви периметри.

Пресметај ги должините на страните означени со букви.

Прво пресметај го периметарот на кругот. Потоа користи го за пресметување периметар на другите 2Д-форми така што ќе составиш равенка со дадената непозната должина.







Цртежите не се во вистинска големина

9. Еден круг има плоштина 14,8 cm^2.

Пресметај го радиусот на кругот.

Реши ја равенката $\pi r^2 = 14{,}8$

10. На сликата е прикажан кружен кратер на површината на Месечината.

Направена е процена дека периметарот на кратерот е 120 km.

Пресметај ја плоштината на површината покриена со кратерот.

Прво пресметај го радиусот на кратерот.



Задачи за повторување

1. Една градежна цигла има маса 2,7 kg.

Пресметај ја масата на 840 цигли.

Решението запиши го во тони.



2. Зорица има бокал со 3 литри сок од портокал.

Пресметај колку чаши од по 180 милилитри може да наполни со сок.

3. Марко има парче дрво долго 2,8 метра.

Сака да го подели на мали парчиња долги по 12 сантиметри.

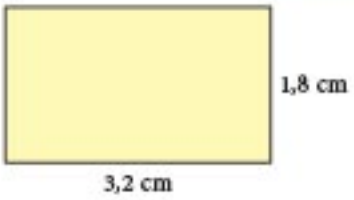
Пресметај на колку мали парчиња може да го пресече дрвото.

4. Монетата од 1 денар има маса 5,10 грама.

Стефан има касичка во која има 500 денари во монети од по 1 денар.

Пресметај ја вкупната маса на монетите од касичката во килограми.

5. **а)** Пресметај ја плоштината на правоаголникот во cm^2.



б) Пресметај ја плоштината во mm^2.

6. Претвори ги следниве плоштини во cm^2.

а) $2\ m^2$ **б)** $200\ mm^2$

в) $6{,}5\ m^2$ **г)** $5000\ mm^2$

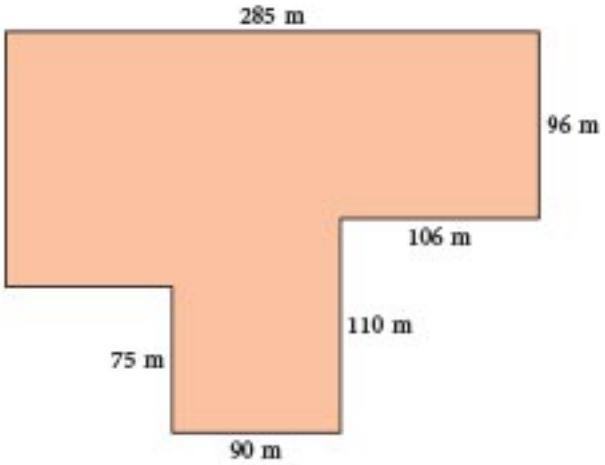
7. Претвори во m^2.

а) $4\ km^2$ **б)** $80000\ cm^2$

в) $9{,}6\ km^2$ **г)** $5000000\ mm^2$

8. Едно фудбалско игралиште има димензии 195 метри и 96 метри. Пресметај ја неговата плоштина во хектари.

9. На цртежот е прикажан план на градежно земјиште.

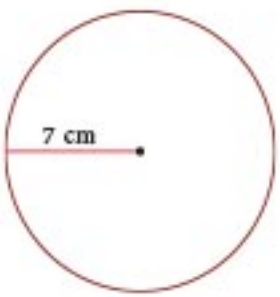


а) Пресметај ја плоштината на земјиштето во m^2.

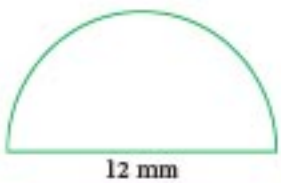
б) Претвори го решението во хектари.

10. Пресметај ги периметрите на следните 2Д-форми. Заокружи го решението на 3 значајни цифри.

а)



б)

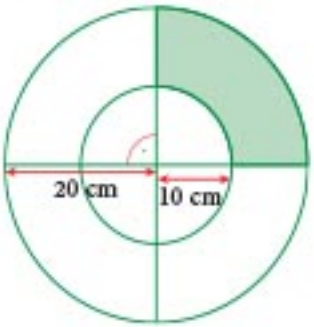


в)



11. Пресметај ја плоштината на 2Д-формите од претходната задача.

12. 2Д-формата е составена од два круга со заеднички центар, еден со радиус 20 cm, а другиот со радиус 10 cm.



Таа е поделена на четири четвртини.

Пресметај ја плоштината на обоениот дел.

Одземи $\frac{1}{4}$ од плоштината на малиот круг од $\frac{1}{4}$ од плоштината на големиот круг.

5 Работа со податоци и решавање проблеми

Наставни цели

- Предлага прашања за истражување, користејќи статистички методи; идентификува множество на податоци што се потребни и како тие да се соберат; ја одредува големината на примерокот и степенот на точност.
- Идентификува примарни или секундарни извори за соодветни податоци.
- Изработува, тестира и ја прочистува листата од собрани податоци.
- Ја разгледува и ја оценува ефикасноста на различни стратегии и пристапи и ја подобрува постапката на решавање.
- Изработува и користи инструмент за собирање податоци или прашалник за едноставна анкета.
- Прецизно идентификува, организира, претставува и толкува информации во писмена форма, табеларно, графички и со дијаграм.
- Собира и средува дискретни и континуирани податоци, избира соодветни еднакви класни интервали каде што е потребно.
- Избира, црта и толкува дијаграми и графици, вклучувајќи:
  - дијаграми на фреквенции за дискретни и континуирани податоци;
  - линиски график за временски период;
  - дијаграми со точки, за да се развие разбирање за корелација;
  - последователни стебло-лист дијаграми.
- Споредува две или повеќе распределби; донесува заклучоци користејќи ја формата на распределба и соодветната статистика.
- Прави статистички пресметувања и одбира статистика што е најмногу поврзана со проблемот.
- Ги поврзува резултатите и заклучоците со првичните прашања.

5.1 Планирање на истражување

Избор на прашања за истражување

Пред вистински да го започнеме статистичкото истражување, треба добро да размислиме како ќе го формулираме прашањето или прашањата што ќе ги поставиме. Тоа ќе ни помогне да одлучиме кои податоци да ги собираме и како да ги собираме.

Мораме да бидеме сигурни дека прашањето е јасно.

Секогаш е подобро да поставиме две помали прашања отколку да ги комбинираме во едно големо прашање.

Пример 1

Јована сака да направи статистичко истражување поврзано со фудбал.

Предложи:

а) две прашања што таа треба да ги постави.

б) податоци потребни за секое од двете прашања.

Прашање 1

а) Јована би можела да праша: „Дали фудбалските екипи постигнуваат повеќе голови кога има повеќе публика на трибините?“

б) Нејзе би ѝ биле потребни бројот на присутните гледачи и крајниот резултат за одреден број фудбалски натпревари.

Прашање 2

а) Таа би можела да праша: „Дали голманот е повисок од другите играчи?“

б) Нејзе би ѝ биле потребни информации за висините на играчите.

Пример 2

Симон сака да направи статистичко истражување за годишните одмори.

Предложи:

а) две прашања што тој треба да ги постави

б) податоци потребни за секое од двете прашања.

Прашање 1

а) Симон би можел да праша: „Дали годишните одмори во потоплите држави се поскапи отколку во постудените држави?“

б) Нему би му биле потребни просечните температури за повеќе држави, како и трошоците за престој во тие држави.

Прашање 2

а) Симон би можел да праша: „Дали луѓето претпочитаат да се одмораат во топли држави?“

б) Тој би требало да праша повеќе луѓе каде претпочитаат да одат на одмор и да ги праша дали е тоа причината за нивната посета таму.

Извори на податоци

Можеме да користиме **примарни податоци**. Тоа се податоците што ги собираме самите.

Можеме да користиме **секундарни податоци**. Тоа се податоците што веќе ги прибрал некој друг.

Постојат многу извори на секундарни податоци. Многу влади објавуваат национални статистики. На интернет има многу достапни бази на податоци и алманаси (алманах е референтна книга што обично се објавува годишно).

Одредување примерок

Целата група што е од интерес на истражувањето ја нарекуваме **популација**.

Можеби нема да биде можно да му поставиме прашање на секој човек од популацијата.

Кога избираме само дел од популацијата, делот од целата популација што го избираме го нарекуваме **примерок**.

Околу 10% од популацијата често е разумна големина на примерок. Обично, доволен е минимум од околу 30 луѓе.

Методи за собирање податоци

Кога самите треба да собираме податоци, треба да спроведеме **истражување**.

Можеме да им поставуваме прашања на луѓето со помош на **прашалник** или преку **интервју**.

Прашалникот обично е отпечатен на хартија и луѓето сами ги одговараат прашањата во него.

При интервју, ние директно ги поставуваме прашањата.

Кога треба да ги запишеме резултатите за некакво случување, треба да спроведеме **експеримент** или да ги бележиме **набљудувањата**.

Кога ги бележиме мерењата, потребно е да бидеме сигурни дека користиме соодветен **степен на точност**. На пример, ако го мериме времето потребно за да се истрчаат 100 метри и ако го запишуваме времето заокружено на најблиската секунда, може да се случи поголемиот број времиња да бидат еднакви. Мерењето на десеттиот дел од секундата би бил подобар степен на точност.

Пример 3

Како би ги собирал податоците за да одговориш на следните прашања?

а) Кој е најпопуларниот вид музика меѓу учениците во едно одделение?

б) Која боја на автомобил е најпопуларна?

в) Дали е поверојатно, намачканото парче леб со путер да падне на намачканата страна ако го испуштиме?

а) Ќе направиме истражување.

Би можеле да ги прашаме учениците од одделението. Можеме да го интервјуираме секој ученик или да им дадеме на сите да пополнат прашалник, што е претходно подготвен.

б) Ќе ги запишуваме набљудувањата.

Би можеле да ги запишуваме боите на автомобилите на паркингот од училиштето или додека тие поминуваат пред влезот на училиштето.

в) Ќе направиме експеримент.

Би можеле да испуштаме парче леб намачкано со путер и да запишуваме дали тоа паѓа на намачканата страна или не.

Пример 4

Јована сака да ги открие висините на 20 члена на нејзиниот одбојкарски тим.

а) Дали таа треба да го праша секој член на тимот или да избере примерок?

б) Колкав степен на точност треба да користи Јована?

а) Јована треба да го праша секој член на тимот бидејќи има само 20 члена.

б) Мерењето заокружено на најблискиот сантиметар ќе биде доволно.

Задачи

1. Предложи едно прашање што би можело да се постави, како и податоците што се потребни за истражување во врска со:

а) тенисот

б) купувањето музички инструмент

в) времето

г) купувањето автомобил од страна на осумнаесетгодишници.

2. Дали би користел примарни или секундарни податоци за да истражуваш во врска со:

а) висините на учениците во твоето одделение

б) навиките на рециклирање во твојот град, односно село

в) навиките на рециклирање во твојата држава

г) површините на државите во светот

д) временските услови.



3. Избери истражување, експеримент или набљудување за да откриеш кој метод би бил најдобар за собирање податоци за:

а) откривање кој вид филм е најпопуларен меѓу учениците во твоето одделение

б) истражување на бројот на луѓе што се возат во автомобилите

в) истражување на бројот на миленичиња што луѓето ги имаат во твојот град, односно село

г) откривање дали тинејџерите имаат побрзи рефлекси отколку возрасните лица

д) откривање дали едно ѓубриво е подобро од друго

ѓ) откривање дали новиот пливачки базен е подобар од стариот

е) откривање колку луѓе го користат новиот пливачки базен секој ден.

4. Менаџерот на фудбалски клуб сака да открие дали навивачите сакаат угостителски услуги во текот на натпреварите.

а) Објасни зошто менаџерот треба да праша одреден примерок од навивачи.

б) Колку навивачи треба да праша менаџерот?

5. Една компанија прави 1000 светилки секој ден.

Менаџерите на компанијата сакаат да ги тестираат светилките за да го откријат просечниот рок на траење на една светилка.

а) Наведи две причини зошто компанијата треба да користи примерок.

б) Колку светилки треба да има во примерокот?

в) Предложи степен на точност што можат да го користат при мерење на рокот на траење на светилките.

6. Колкав степен на точност би бил соодветен за истражување на:



а) времето што една група луѓе го троши на вежбање

б) времето потребно за олимписки атлетичар да истрча 100 метри

в) растојанието меѓу два града

г) количеството вода што секојдневно го трошат семејствата?

7. Марина е сопственик на салон за убавина во еден голем град.

Таа размислува да отвори уште еден таков салон во истиот град.

Во групи од двајца или тројца, дискутирајте ги и потоа запишете ги одговорите во врска со следниве работи:

а) Предложете прашање што таа треба да го постави.

б) Кои податоци ѝ се потребни за да ја донесе вистинската одлука?

в) Дали овие податоци се примарни или секундарни?

г) Кој метод на собирање треба да го користи за да ги добие податоците?

д) Кои други фактори би можела да ги земе предвид?

Не заборавај дека градот е голем, па има многу луѓе што живеат или работат во него.

8. Кире сака да открие дали се подобрува неговиот омилен кошаркарски клуб.

Во групи од двајца или тројца, дискутирајте ги и потоа запишете ги одговорите во врска со следниве работи:

а) Предложете прашање кое треба да го постави Кире.

б) Кои податоци му се потребни?

в) Дали овие податоци се примарни или секундарни?

г) Кои други фактори би можел да ги земе предвид?

Постојат две групи луѓе што можат да бидат вклучени – гледачи и играчи. И двете треба да се земат предвид.

5.2 Инструмент за собирање податоци

Првиот прашалник

Сер Френсис Галтон бил роден во Бирмингем во 1822 година.

Тој ја вовел употребата на истражувања и прашалници за собирање информации во граѓанските заедници.

Прашалниците и истражувањата денес имаат многу поширока примена.

Тие даваат многу корисни информации што можат да помогнат при планирање и креирање политики.



Инструментите за собирање податоци мораат да бидат лесни за користење и да овозможуваат собирање на бараните податоци.

Кога правиме сопствен инструмент за собирање податоци, добро е да го тестираме пред да го употребиме за собирање податоци.

Затоа правиме експеримент за да бидеме сигурни дека инструментот за собирање податоци:

- е лесен за користење
- вистински ги собира податоците што ни се потребни.

За собирање бројни податоци, најчесто користиме табела на фреквенција.

- Ако постојат многу различни вредности, тогаш добро е да се поделат во групи.
- Групите треба да имаат еднакви големини.
- Обично пет до осум групи треба да бидат доволни. Користењето повеќе од осум групи дава премногу детали, а при помалку од пет групи нема доволно детали.
- Групите мораат да овозможуваат запишување на најголемата и на најмалата вредност.

Кога ги одредуваме групите, мораме да внимаваме:

- да нема празнини
- да нема преклопувања.

Пример 1

Мустафа собира информации за џепарлакот што дневно го добиваат учениците од неговото одделение.

Очекува најмалата вредност да биде 30 денари, а најголемата вредност 210 денари.

Направи инструмент за собирање податоци што би можел да го користи Мустафа.

Оваа табела на фреквенција би била најсоодветна.

Џепарлак, денари	Цртички	Фреквенција
$0 < p \leq 50$		
$50 < p \leq 100$		
$100 < p \leq 150$		
$150 < p \leq 200$		
$200 < p \leq 250$		

Има многу други групи што можат да се користат.

На пример, $20 < p \leq 70$, $70 < p \leq 120$, но полесно е да работиме со броевите во групите дадени во табелата.

Пример 2

Никола собира информации за висината на учениците во неговото одделение.

Тој одлучил да ја користи следната табела.

Висина, cm	Цртички	Фреквенција
140-150		
150-160		
165-180		

Најди четири забелешки за табелата.

Постои празнина бидејќи нема каде да се запише висината од 162 cm, на пример.

Постои преклопување бидејќи висината од 150 cm би припаѓала на двете групи.

Класите (групите) немаат иста големина.

Со трите групи не можат да се приберат доволно детали.

Прашалници

Прашањата мораат да бидат лесно разбирливи, инаку одговорите нема да ги дадат потребните информации.

На пример, на прашањето „Колку спортуваш?“ некои од луѓето би одговориле „многу“, а други можеби би рекле „неколку часови неделно“.

Прашањата не смеат да бидат навредливи.

На пример, многу луѓе не сакаат да ја откријат нивната точна возраст. Затоа, најдобро е да се понудат рангови за возраст, на пример, од 20 до 29 години, од 30 до 39 години итн.

Прашањата не смеат да бидат наведувачки.

На пример, прашањето, „Што мислиш за извонредниот нов пливачки базен во ...?“ би навело многу луѓе да се согласат. Целта на прашалникот е да ги открие мислењата на луѓето, а не да се наведуваат луѓето да се согласат.

Луѓето не сакаат да трошат многу време на одговарање прашалници. Треба да се користат прашања што можат брзо да се одговорат. Прашањата од видот Да/Не и прашањата со поле за потврда се брзи за одговарање.

Полињата за потврда треба да:

- немаат празнини
- немаат преклопувања
- го вклучуваат целиот ранг на одговори
- бидат „во рамнотежа“ така што ќе има ист број позитивни и негативни одговори за мислењата.

Прашалниците обично треба да бидат тестирани пред употреба.

Целта на тестовите е да се провери дека:

- прашалниците се разбирливи
- ги обезбедуваат потребните информации.

Пример 3

Андреј сака да открие колку време поминуваат учениците од неговото одделение во гледање телевизија.

Тој разгледува две можни прашања:

I Колку гледаш телевизија?

II Колку часови поминуваш во гледање телевизија?

а) Најди по една забелешка за секое од двете прашања.

б) Запиши подобро прашање што би можел да го користи Андреј.

а) I Не е јасно кој вид одговор се бара. Некои ученици можат да одговорат „многу“ или „не многу“.

II Нема временски период во прашањето. Некои одговори можеби ќе се однесуваат за една вечер, други за една недела или за друг временски период. Некои, пак, можеби не запомниле точно.

б) Колку часови гледаше телевизија вчера вечер?

- ❑ Воопшто не
- ❑ Помалку од 1 час
- ❑ Од 1 до 2 часа
- ❑ 2 часа или подолго

Задачи

1. Елена сака да знае колку луѓе се возат во автомобилите што поминуваат покрај училиштето.

а) Дизајнирај инструмент за собирање податоци што таа би можела да го искористи за собирање на овие податоци.

б) Ако можеш да го направиш тоа безбедно, под надзор на твојот наставник, пополни го твојот формулар за податоци со броење на бројот на луѓе во автомобилите што поминуваат пред твоето училиште во одреден временски период.

2. Невена сака да знае дали на нејзината телевизиска емисија има повеќе реклами отколку на другите емисии.

а) Дизајнирај инструмент за собирање податоци што би можела да го искористи за собирање на овие податоци.

б) Избери неколку телевизиски емисии и пополни го формуларот со податоци споредувајќи го бројот на реклами во нив со бројот на реклами на твојата омилена телевизиска емисија.

3. Миле одгледува две различни сорти грав во својата градина.

Тој сака да открие која сорта, од еден корен дава повеќе грав.

Тој знае дека од ниту еден корен не се добива помалку од 9 зрна грав ниту повеќе од 51 зрно грав.

Состави инструмент за собирање податоци што би можел да го користи.

Употреби соодветни групи, како и тоа дека постојат две сорти грав.

4. Катерина го составила овој инструмент за собирање податоци за да истражи колку често луѓето го користат локалниот автобуски превоз.

Колку често го користиш локалниот автобус?

- ❑ Никогаш
- ❑ Понекогаш
- ❑ Често
- ❑ Секогаш

а) Запиши две неправилности за овој инструмент за собирање податоци.

б) Состави подобар инструмент за собирање податоци што би можела да го користи Катерина.

5. Менаџер на забавен парк сака да знае што мислат посетителите за опремата во паркот. Тој го поставил следното прашање во неговото истражување.

Што мислиш за опремата во забавниот парк?

- ❑ Одлична
- ❑ Многу добра
- ❑ Добра
- ❑ Задоволува
- ❑ Слаба

а) Најди една забелешка на делот со одговорите.

б) Запиши подобро прашање што би можело да се искористи во истражувањето.

6. Јована сака да знае колку често тинејџерите во нејзиниот град го користат локалниот пливачки базен.

Запиши соодветни прашања што би можеле да се употребат како дел од прашалникот.

7. Сузана ја истражува масата на младите домати во својот стакленик.

Таа ја употребила следната табела за да ги запише резултатите.

Маса, m (g)	Цртички	Фреквенција
5-10		
10-20		
25-30		
30-50		

Најди две неправилности за табелата.

8. Оливер ги мери висините на некои растенија во својата градина.

Висините, во сантиметри, се:

23 45 43 31 50 49 12 32 59 18

16 32 37 38 61 45 37 14 26 53

Запиши ги овие висини во табела на фреквенција користејќи соодветни групи.

Ако ти е потребно, можеш да користиш и колона за цртички.

9. Во еден ресторан започнал да работи нов менаџер. Тој сака да знае колку често луѓето што живеат во близина јадат надвор од дома и каков вид храна сакаат да јадат.

Во групи од двајца или тројца, дискутирајте ги прашањата што би можел да ги постави.

Запиши неколку прашања што би можел да ги вклучи во прашалникот.

Обиди се да не поставуваш многу прашања бидејќи долгите прашалници често не се пополнуваат докрај.

10. Во еден град ќе се отвора нов спортски центар. Менаџерот сака да постави опрема што ќе ја користат локалните жители. Тој користи прашалник за да открие што сакаат тие.

Во групи од двајца или тројца, дискутирајте кои информации треба да ги знае менаџерот.

Запиши неколку прашања што би можел да ги вклучи во прашалникот.

Корисно би било ако откриеш дали луѓето се заинтересирани да спортуваат или да гледаат спортски активности, како и тоа кои спортови се најбарани меѓу населението.

11. Александар истражува колку често луѓето одат во кино.

Едно од неговите прашања е: „Колку често одите во кино?“

а) Најди две неправилности на ова прашање.

б) Запиши подобро прашање што би можело да се користи.

12. Виолета ги истражува должините на песните во својата колекција на компакт-дискови.

а) Направи инструмент за собирање податоци што би можела да го користи Виолета.

б) Пополни го инструментот за собирање податоци за неколку твои компакт-дискови.

Користи соодветни класи.

5.3 Стебло-лист дијаграми

Стебло-лист дијаграмите ги користиме за да ги организираме податоците подредени по големина.

Стеблото е лево од вертикалната линија.

Секој лист секогаш е претставен со една цифра.

Листовите мораат да бидат подредени по големина во секоја редица.

Листовите ги запишуваме во повеќе редици едно под друго, во вертикални линии.

Секогаш мораме да зададеме клуч за толкување на дијаграмот.



Пример 1

Резултатите од тест по математика за група од 23 момчиња се:

41, 10, 23, 15, 52, 30, 26, 29, 58, 42, 19, 49, 38, 37, 25, 31, 55, 42, 24, 43, 35, 34, 25

а) Нацртај стебло-лист дијаграм за да ги прикажеш овие податоци.

б) Запиши ја медијаната на резултатите од тестот.

в) Пресметај го рангот на резултатите од тест.

а)

1	0	5	9			
2	3	4	5	5	6	9
3	0	1	4	5	7	8
4	1	2	2	3	9	
5	2	5	8			

клуч: 5|2 претставува 52

б) Медијана е вредноста што се наоѓа во средината на низата податоци, по нивното подредување по големина.

Има 23 вредности. Вредноста во средината е дванаесеттата.

Медијаната е 34.

в) Ранг = најголема вредност − најмала вредност = 58 − 10 = 48.

Последователни стебло-лист дијаграми

Последователни стебло-лист дијаграми се користат при работа со две распределби, на пример со машка и женска популација.

Со тие дијаграми е можна брза и лесна споредба на распределбите.

Стеблото е во средина.

Листовите се наоѓаат на двете страни од стеблото.

Треба да ги означиме двете страни од дијаграмот.

Листовите лево од стеблото се во обратен редослед, така што најмалиот е најблиску до стеблото.

Клучот прикажува стебло и два листа.

Пример 2

Резултатите од тестот по математика за група од 25 девојчиња се:

45, 20, 37, 57, 12, 43, 53, 57, 47, 57, 44, 11, 24, 36, 44, 31, 25, 50, 42, 40, 55, 25, 28, 58, 48

а) Додај ги резултатите за девојчињата во стебло-лист дијаграмот од претходниот пример за да формираш последователен стебло-лист дијаграм.

б) Одреди ја медијаната на резултатите од тестот на девојчињата.

в) Пресметај го рангот на резултатите од тестот на девојчињата.

г) Спореди ги резултатите од тестот на девојчињата и на момчињата.

а)

девојчиња								момчиња						
					2	1	1	0	5	9				
			8	5	5	4	0	2	3	4	5	5	6	9
					7	6	1	3	0	1	4	5	7	8
8	7	5	4	4	3	2	0	4	1	2	2	3	9	
	8	7	7	7	5	3	0	5	2	5	8			

клуч: 0|5|2 значи 50 за девојчињата и 52 за момчињата

б) Медијаната е 43.

в) Ранг = 58 − 11 = 47.

г) Во просек, девојчињата имаат подобри резултати на тестот отколку момчињата бидејќи имаат повисока медијана.

Резултатите на момчињата и на девојчињата имаат речиси еднаков ранг.

Од формата на стебло-лист дијаграмот се гледа дека резултатите од тестот на момчињата се главно во средината на рангот на оценки. Најголемиот број резултати на девојчињата се наоѓаат помеѓу 40 и 60. Тоа значи дека тие во целина имаат подобри резултати.

Задачи

1. Последователниот стебло-лист дијаграм го прикажува бројот на поени освоени од двајца играчи во текот на натпреварите во кошарка последната сезона.

Иван						Андреј						
					1	9						
		9	8	7	3	2	1	7				
8	7	6	5	4	2	0	3	2	5	6	8	8
		8	5	4	2	1	4	0	2	4	5	5	6	8
			5	3	1	0	5	1	3	3	9			
							6	2	3					
						1	7							

клуч: 3|2|1 значи Иван имал 23 поени, а Андреј 21 поен.

а) Колкав е најмалиот број поени што ги освоил Андреј?

б) Колкав е најголемиот број поени што ги освоил Андреј?

в) Пресметај го рангот на поените на Андреј.

г) Пресметај го рангот на поените на Иван.

д) Одреди ја медијаната на поените на Андреј.

ѓ) Одреди ја медијаната на поените на Иван.

е) Кој има поголема медијана? Според медијаната, што може да се каже за нивниот број поени?

ж) Кој има поголем ранг? Според рангот, што може да се каже за нивниот број поени?

2. Поени на тестот на учениците од две одделенија се следниве:

Одделение А:

71, 51, 25, 31, 38, 47, 53, 30, 34, 43, 59, 60, 35, 42, 45, 56, 63, 40, 47, 56, 64

Одделение Б:

28, 46, 59, 66, 73, 19, 30, 46, 63, 64, 37, 43, 58, 62, 69, 74, 23, 34, 59, 60, 70, 41, 55, 68, 75

а) Нацртај последователен стебло-лист дијаграм за да ги прикажеш резултатите од тестот на учениците од двете одделенија.

б) За одделението А одреди:

I медијана

II ранг

в) За одделението Б одреди:

I медијана

II ранг

г) Кое одделение има повисока медијана? Според медијаната, што може да се каже за резултатите од тестот?

д) Кое одделение има повисок ранг? Според рангот, што може да се каже за резултатите од тестот?

3. Филип го запишувал бројот на паркирани автомобили на паркингот секој ден во 9 часот претпладне и во 5 часот попладне во текот на 27 дена.

Добиени се следните податоци:

Во 9 часот:

05, 25, 57, 43, 30, 34, 34, 45, 53, 65,

38, 23, 76, 58, 40, 62, 18, 37, 45, 52,

16, 09, 34, 32, 50, 43, 22

Во 17 часот:

09, 38, 43, 57, 54, 31, 77, 57, 68, 62,

58, 43, 57, 42, 37, 31, 30, 40, 60, 52,

58, 52, 39, 32, 30, 72, 62

а) Нацртај последователен стебло-лист дијаграм за да ги прикажеш податоците.

б) Одреди ги медијаната и рангот на бројот автомобили на паркингот во 9 часот.

в) Одреди ги медијаната и рангот на бројот автомобили на паркингот во 17 часот.

г) Спореди го бројот на автомобили на паркингот во 9 часот и во 17 часот.

4. Фармерот ги мерел масите, во грамови, на две сорти компири.

Сорта А:

36, 44, 49, 54, 57, 68, 82, 34, 45, 57, 58, 63, 74, 79, 31, 48, 53, 67, 69, 81, 30, 48, 51, 66, 71

Сорта Б:

75, 76, 81, 39, 43, 56, 63, 75, 40, 49, 59, 66, 31, 47, 61, 65, 56, 59, 65, 73, 76, 80, 64, 67, 72

Со цртање последователен стебло-лист дијаграм спореди ги двете распределби.

5.4 Статистики за големи групи податоци

Просек

Аритметичка средина, односно просек, ја пресметуваме со формулата:

$$\text{Просек} = \frac{\text{збир на сите вредности на податоците во групата}}{\text{вкупен број податоци во групата}}$$

Големите групи податоци обично ги групираме во класи.

Бидејќи не ги знаеме точните вредности, правиме **процена на просекот** со одредување на средната вредност на секоја класа.

Пример 1

Со дадената табела на фреквенција се прикажани времињата на патувања со автобус.

Направи процена на просекот на времињата на патувања со автобус.

Време, t (минути)	Фреквенција
$5 < t \leq 10$	4
$10 < t \leq 15$	18
$15 < t \leq 20$	32
$20 < t \leq 25$	14
$25 < t \leq 30$	7

Време, t (минути)	Фреквенција, f	Средна вредност на класа, m	$f \cdot m$
$5 < t \leq 10$	4	7,5	30
$10 < t \leq 15$	18	12,5	225
$15 < t \leq 20$	32	17,5	560
$20 < t \leq 25$	14	22,5	315
$25 < t \leq 30$	7	27,5	192,5
	Вкупно 75		Вкупно 1322,5

$$\text{Просек} = \frac{\text{збирот на вредности во } f \cdot m \text{ колона}}{\text{збир на фреквенции}} = \frac{1322{,}5}{75} = 17{,}6 \text{ до 1 д.м.}$$

Медијана

Во група со непарен број податоци, медијаната е податокот во средина, кога податоците се подредени по големина. Во група со парен број податоци, медијаната е аритметичка средина од средните два члена, кога податоците се подредени по големина.

Кај групираните податоци можеме да ја одредиме групата (или класата) што ја содржи медијаната.

Пример 2

Направи процена на медијаната на времињата на патувања со автобус за податоците од пример 1.

Медијаната е вредноста во средина.

Тоа е триесет и осмата (38) вредност во табелата.

Време, t (минути)	Фреквенција
$5 < t \leq 10$	4
$10 < t \leq 15$	18
$15 < t \leq 20$	32
$20 < t \leq 25$	14
$25 < t \leq 30$	7

Кога времињата се подредени по големина:

Првите 4 времиња се 10 минути или помали.

Првите 22 времиња се 15 минути или помали.

Првите 54 времиња се помали или еднаква на 20 минути.

38-то време е во класата $15 < t \leq 20$.

Мода

Мода е вредност што најчесто се појавува во една група податоци.

Можеме да ја одредиме класата што ја содржи модата, односно модалната класа за групираните податоци.

Пример 3

Најди ја модалната класа за времињата на патување со автобус во примерот 1.

Модалната класа е класата со најголемата фреквенција.

Модалната класа е $15 < t \leq 20$.

Време, t (минути)	Фреквенција
$5 < t \leq 10$	4
$10 < t \leq 15$	18
$15 < t \leq 20$	32
$20 < t \leq 25$	14
$25 < t \leq 30$	7

Задачи

1. Со табелите се прикажани групирани податоци.

За секоја табела:

а) најди ја модалната класа

б) најди ја класата што ја содржи медијаната

в) направи процена за просекот користејќи средни вредности на класи.

А)

Класа	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49
Фреквенција	4	8	12	6	2

Б)

Класа	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69
Фреквенција	4	18	16	8	3	1

2. Табелата ги прикажува висините во сантиметри на група ученици.

а) Направи процена на просекот на висините на учениците користејќи средни вредности на класи.

б) Најди ја класата што ја содржи медијаната на висините на учениците.

Висина, h (cm)	Фреквенција
$150 < h \leq 160$	14
$160 < h \leq 170$	48
$170 < h \leq 180$	60
$180 < h \leq 190$	5

3. Во табелата се прикажани телесните маси на група бебиња.

Маса, m (kg)	Фреквенција
$0 < m \leq 2$	8
$2 < m \leq 4$	40
$4 < m \leq 6$	29
$6 < m \leq 8$	2

а) Направи процена на просекот на телесните маси на бебињата, користејќи средни вредности на класи.

б) Најди ја класата што ја содржи медијаната на телесните маси на бебињата.

4. Во табелите се прикажани времињата за кои учениците од две групи решаваат сложувалка.

Група А	
Време, t (минути)	Фреквенција
$0 < t \leq 10$	4
$10 < t \leq 20$	12
$20 < t \leq 30$	25
$30 < t \leq 40$	18
$40 < t \leq 50$	11

Група Б	
Време, t (минути)	Фреквенција
$0 < t \leq 10$	3
$10 < t \leq 20$	10
$20 < t \leq 30$	20
$30 < t \leq 40$	12
$40 < t \leq 50$	4

а) Направи процена на просекот на времињата за секоја група ученици.

б) Која група во целина ја решава сложувалката побрзо? Објасни го твојот одговор.

5. Теодора вели дека девојчињата имаат покрупен ракопис отколку момчињата.

Таа замолила неколку ученици да ја напишат реченицата: „На една ливада има многу разнобојни цвеќиња“.

Потоа се измерени сите реченици.

Резултатите се прикажани во табелите.

Девојчиња	
Должина, l (cm)	Фреквенција
$14 < l \leq 16$	4
$16 < l \leq 18$	8
$18 < l \leq 20$	32
$20 < l \leq 22$	16
$22 < l \leq 24$	12

Момчиња	
Должина, l (cm)	Фреквенција
$14 < l \leq 16$	4
$16 < l \leq 18$	9
$18 < l \leq 20$	29
$20 < l \leq 22$	14
$22 < l \leq 24$	4

Дали Теодора е во право? Покажи како одлучи.

Користи процени на просеците на должините на ракописите за момчињата и за девојчињата.

6. Али го мери времето t на чекање, во минути, на купувачите пред една каса во супермаркет.

Неговите резултати се прикажани во табелата.

Време, t (минути)	$0 < t \leq 1$	$1 < t \leq 2$	$2 < t \leq 3$	$3 < t \leq 4$	$4 < t \leq 5$	$5 < t \leq 6$	$6 < t \leq 7$
Фреквенција	8	18	30	20	10	8	6

Од раководителот на супермаркетот се бара да вработи повеќе луѓе на касите ако просечното „време на чекање“ е поголемо од 3 минути. Ако просекот на времето на чекање е помало од 3 минути, раководителот нема потреба да вработува никого.

а) Али вели: „Просечната вредност покажува дека е потребно да се вработат уште луѓе“. Покажи како просекот го оправдува тврдењето на Али.

б) Раководителот вели: „Просечната вредност покажува дека не се потребни вработувања“. Покажи како медијаната го оправдува ставот на раководителот.

Избирање најсоодветна статистика на група податоци

Важно е да знаеме да одредиме која статистичка вредност (статистика) најдобро ќе ја претставува групата податоци.

Избраната статистика треба најдобро да ги претставува карактеристиките на цела група податоци.

Во следната табела се прикажани предностите и недостатоците на трите познати статистички вредности.

Статистика	Предности	Недостатоци
Мода	Секогаш е една од вредностите на податоците. Единствена статистика што можеме да ја одредиме за ненумерички податоци.	Понекогаш нема мода. Можат да постојат повеќе моди.
Просек	За негово пресметување се користат сите вредности	На неговата вредност можат да влијаат мал број многу големи или многу мали вредности. Малку е веројатно да биде една од вредностите на податоците. Може да биде потребно време за да се пресмета.
Медијана	На нејзината вредност не влијае дали податоците се многу големи или многу мали вредности.	Може да биде потребно повеќе време за пресметување, бидејќи прво мораме да ги подредиме податоците.

Пример 4

Неколку стари автомобили се на продажба.

Дадени се нивните цени, во денари:

90000, 105000, 104000, 90000, 92000, 201000, 95000

а) Најди ги модата, просекот и медијаната на цените.

б) Одреди и објасни која од овие статистики најдобро ги претставува цените.

а) Модата е 90000.

Медијаната е 95000.

Просекот е 111000.

б) Модата е најниската цена, па таа не ги претставува добро податоците.

Просекот е повисок од сите цени освен од највисоката цена, па и тој не ги претставува добро податоците.

Вредноста на медијаната се наоѓа во интервалот на дадените податоци, според тоа со медијана најдобро може да се претстави оваа група податоци.

Пример 5

Јован добива 200 денари џепарлак неделно.

Тој направил истражување за да открие колку џепарлак добиваат децата во неговото маало.

Дознал дека:

просекот е 270 денари

медијаната е 260 денари

модата е 250 денари

Јован вели: „Треба да добивам 70 денари повеќе за да го достигнам неделниот џепарлак како другите деца".

Неговата мајка вели: „Ќе ти давам 50 денари повеќе за да го достигнеш неделниот џепарлак како повеќето деца".

а) Објасни зошто се согласуваш со Јован.

б) Објасни зошто се согласуваш со неговата мајка.

в) Предложи други работи кои Јован и мајка му треба да ги земат предвид.

а) Просекот е 70 денари поголем од џепарлакот што го добива Јован.

б) Модата е 50 денари поголема од џепарлакот што го добива Јован.

в) Постојат повеќе работи што тие треба да ги земат предвид, како на пример, дали Јован е подготвен да помогне околу домашните работи или дали Јован мора да купува компјутерски игри. Треба да се земе предвид и големината на областа во која Јован ги наоѓа податоците, како и бројот на прашани деца – помал примерок нема да даде веродостојни статистики.

Задачи

1. Со која статистика најдобро ќе биде претставена секоја од дадените групи податоци?

а) Просечната големина на чевли на учениците во твоето одделение.

б) Просечниот број деца во секое семејство во едно село.

в) Оценките на натпревар по танцување за да се добие просечна оценка.

г) Просечната висина на учениците во твоето одделение.

д) Просечната боја на коса на луѓето во едно село.

2. Абдула го запишувал бројот на километри што ги поминувал секој ден со својот автомобил.

Ги запишал следните податоци: 12, 15, 8, 9, 14, 137, 8.

а) Најди ги модата, медијаната и просекот за овие растојанија.

б) Со која од вредностите под **а)** најдобро ќе ги претставиш овие растојанија? Објасни го твојот одговор.



3. На пакетчето со спојувалки за хартија пишува: „Просечно содржи 30 спојувалки".

Ангел го изброил бројот на спојувалки во 170 пакетчиња.

Спојувалки	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
Фреквенција	5	3	8	12	48	32	17	20	15	5	1	4

а) Колку пакетчиња имаат 30 или повеќе спојувалки?

б) Колку пакетчиња имаат помалку од 30 спојувалки?

в) Пресметај ги модата, медијаната и просекот на бројот на спојувалки во пакетчињата.

г) Искористи ги твоите решенија под **в)** за да го објасниш тврдењето „просечно содржи 30 спојувалки".

4. Урош ги запишувал времињата потребни за преземање датотеки од интернет, во секунди до најблиската секунда.

Модата на времињата е 4 секунди. Просекот на времињата е 9 секунди. Медијаната на времињата е 6 секунди.

Одреди кое од следниве тврдења е точно, неточно или не може ништо да се каже за него.

а) Најголемиот број времиња на преземање се 4 секунди.

б) Повеќе од половината времиња за преземање се помали од 7 секунди.

в) Постои мал број на многу големи времиња за преземање.

г) Потребни се 5 секунди за преземање една датотека. Тоа е подолго од времето што е потребно да се преземат најголемиот број датотеки поединечно.

д) Потребни се 6 секунди за преземање една датотека. За точно половина од датотеките потребно е подолго време за преземање.



5. Теа прави истражување со кое ги споредува трошоците за одгледување различни миленици.

Таа ги дознала следниве податоци од 10 сопственици на папагалчиња.

Месечен трошок во денари:

110, 100, 90, 240, 60, 160, 80, 40, 250, 320

Таа ги дознала следниве податоци од 8 сопственици на 'рчковци.

Месечен трошок во денари:

80, 220, 180, 30, 50, 210, 40, 190

Теа рекла: „Во просек, поскапо е да одгледуваш папагалче отколку 'рчко".

Дали Теа е во право? Покажи како таа одлучила.

Избери што ќе користиш: мода, медијана или просек.

6. Во табелите се прикажани податоци за платите на вработените во една фабрика.

Работници	
Плата, p, денари (во илјади)	Фреквенција
$10 < p \leq 20$	8
$20 < p \leq 30$	28
$30 < p \leq 40$	14
$40 < p \leq 50$	3
$50 < p \leq 60$	0

Менаџери	
Плата, p, денари (во илјади)	Фреквенција
$10 < p \leq 20$	0
$20 < p \leq 30$	0
$30 < p \leq 40$	5
$40 < p \leq 50$	12
$50 < p \leq 60$	8

а) Направи процена на просекот на платите на работниците.

б) Направи процена на просекот на платите на менаџерите.

в) Комбинирај ги податоците од двете табели. Пресметај го просекот на платите на вработените во фабриката.

г) Работниците сакаат да се зголемат нивните плати. Која вредност би требало да ја искористат за да се обидат да добијат најголемо зголемување на платите.

д) Според написот во еден весник, луѓето во фабриката веќе се добро платени. Која вредност веројатно ја користеле во весникот за да го напишат овој напис?

5.5 Споредување распределби

Полигон на фреквенција

Полигон на фреквенција користиме за претставување и споредување на распределбите на фреквенција на групирани континуирани податоци.

Точките на полигонот се нацртани во пресекот на координатата на средината на секоја класа и координатата на секоја фреквенција за соодветната класа.

Точките се поврзани меѓу себе со прави линии.

За оските на координатниот систем на полигонот на фреквренција важат истите правила како кај дијаграмот на фреквенција.

„Врвот" на полигонот на фреквенција прикажува каде се концентрирани податоците.

Две распределби можат да бидат прикажани во ист координатен систем.

Во тој случај, мораме да ги цртаме полигоните со различни бои и да дадеме клуч.

Кога ги толкуваме полигоните можеме да ги кажеме положбите на врвовите и распространетоста на распределбите.

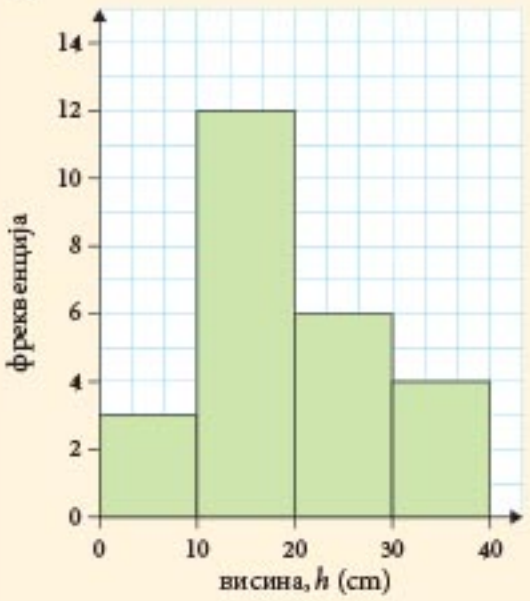
Пример 1

За висините h во cm, прикажани во табелата, нацртај:

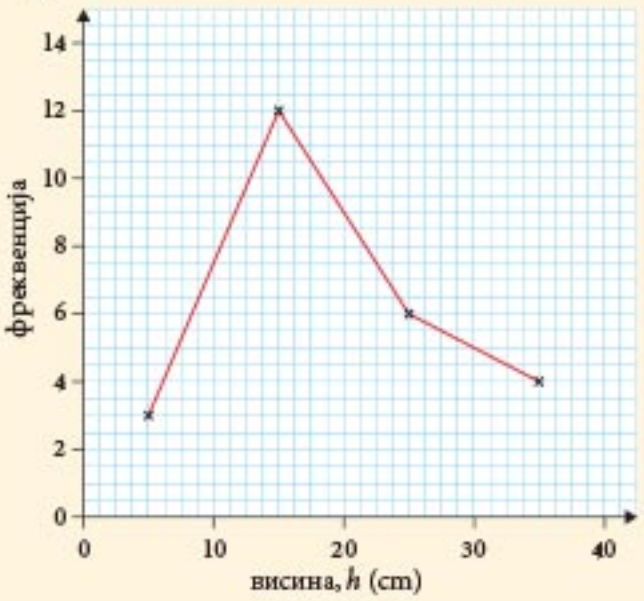
а) дијаграм на фреквенција **б)** полигон на фреквенција

Висина, h (cm)	Фреквенција
$0 < h \leq 10$	3
$10 < h \leq 20$	12
$20 < h \leq 30$	6
$30 < h \leq 40$	4

а)



б)



Столбест дијаграм

Столбести дијаграми користиме кога сакаме да прикажеме истовремено две или повеќе групи податоци. Нив ги нарекуваме **повеќекратни столбести дијаграми**.

Столбестите дијаграми што прикажуваат само две групи податоци ги нарекуваме **двојни столбести дијаграми**.

Повеќекратните столбести дијаграми овозможуваат лесна споредба меѓу две или повеќе распределби.

Кога цртаме повеќекратни столбести дијаграми, мораме да вклучиме и клуч.

Правилата за повеќекратни столбести дијаграми се исти како за обичните столбести дијаграми.

Пример 2

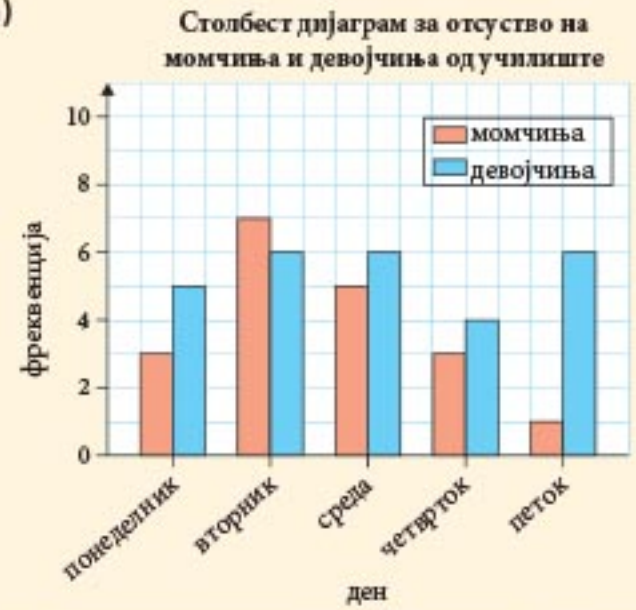
Отсуствата на момчињата и на девојчињата од училиште во текот на цела недела се дадени во следнава табела.

	Понеделник	Вторник	Среда	Четврток	Петок
Момчиња	3	7	5	3	1
Девојчиња	5	6	6	4	6

а) Прикажи ги податоците со повеќекратен столбест дијаграм.

б) Спореди ги отсуствата на момчињата и на девојчињата.

а)

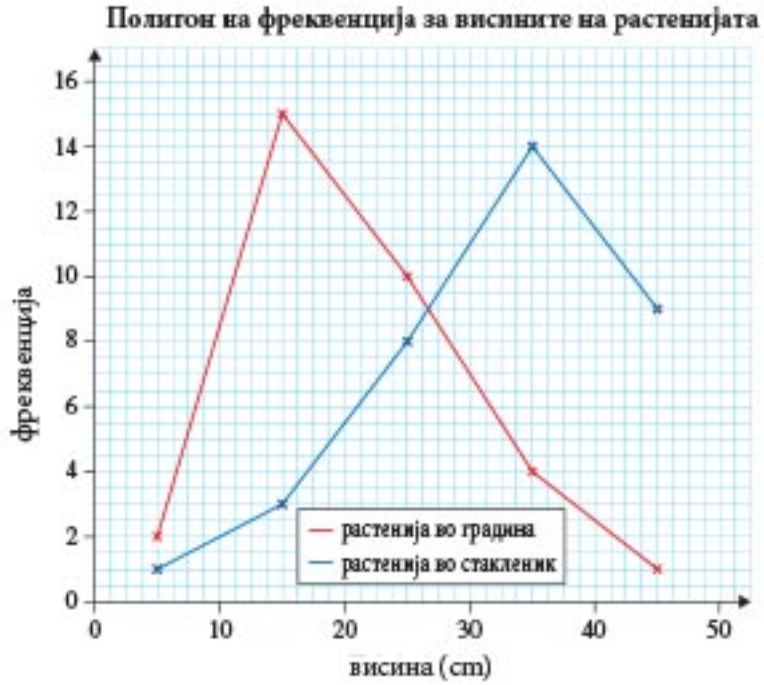


б) Девојчињата отсуствуваат повеќе. Отсуствата на момчињата го достигнуваат врвот во вторник и постепено се намалуваат во текот на неделата.

Задачи

1. Елена одгледува растенија во стакленик и во градина.

Полигонот на фреквенција ги прикажува висините на нејзините растенија.



а) Колку растенија од градината имаат висина помеѓу 10 cm и 20 cm?

б) Колку растенија од стаклениkот имаат висина помеѓу 10 cm и 20 cm?

в) Колку растенија од градината имаат висина од 20 cm или поголема?

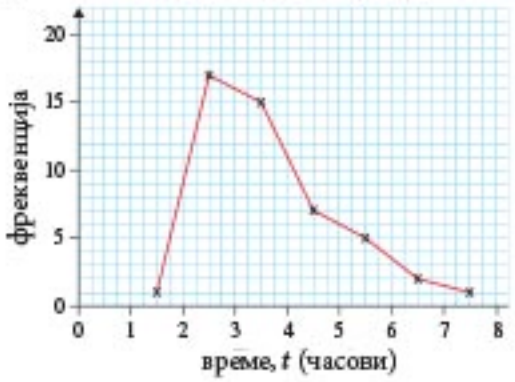
г) Колку растенија од стаклениkот имаат висина од 20 cm или поголема?

д) Кои растенија во целина растат повисоки? Што можеш да заклучиш од полигонот на фреквенции?

2. При истражувањето на две групи ученици запишани се времињата што тие ги поминуваат пред компјутер во текот на една недела.

Полигонот на фреквенција ги прикажува резултатите за групата А.

Полигон на фреквенција за време поминато пред компјутер за група А



Во табелата се прикажани времињата на учениците од група Б што тие ги поминуваат пред компјутер во текот на истата недела како и групата А.

Време, t (часови)	$1 < t \leq 2$	$2 < t \leq 3$	$3 < t \leq 4$	$4 < t \leq 5$	$5 < t \leq 6$	$6 < t \leq 7$	$7 < t \leq 8$
Фреквенција	0	3	5	8	14	13	3

а) Нацртај полигон на фреквенција за групата Б, користејќи го истиот размер како за групата А.

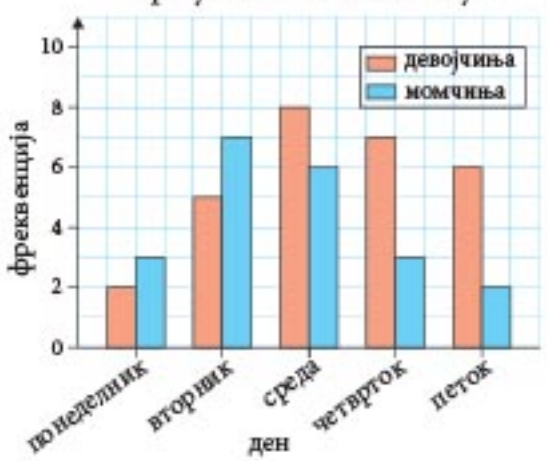
б) Колку ученици од групата Б поминале помалку од 4 часа пред компјутер?

в) Колку ученици од групата А поминале помалку од 4 часа пред компјутер?

г) Со помош на полигоните на фреквенција одреди која група во целина поминала повеќе време пред компјутер. Објасни го твојот одговор.

3. Двојниот столбест дијаграм го прикажува присуството на момчиња и на девојчиња во пливачкиот клуб во текот на една недела.

Двоен столбест дијаграм за присуство во пливачки клуб



а) Колку девојчиња присуствувале во вторникот?

б) Колку момчиња присуствувале во петокот?

в) Кој ден присуствувале најмногу девојчиња?

г) Кој ден присуствувале најмногу момчиња?

д) Кој ден е забележано најголемо вкупно присуство?

ѓ) Во текот на целата недела, колку повеќе девојчиња присуствувале отколку момчиња?

4. Во едно истражување луѓето биле прашани колку пати и зошто патуваат?

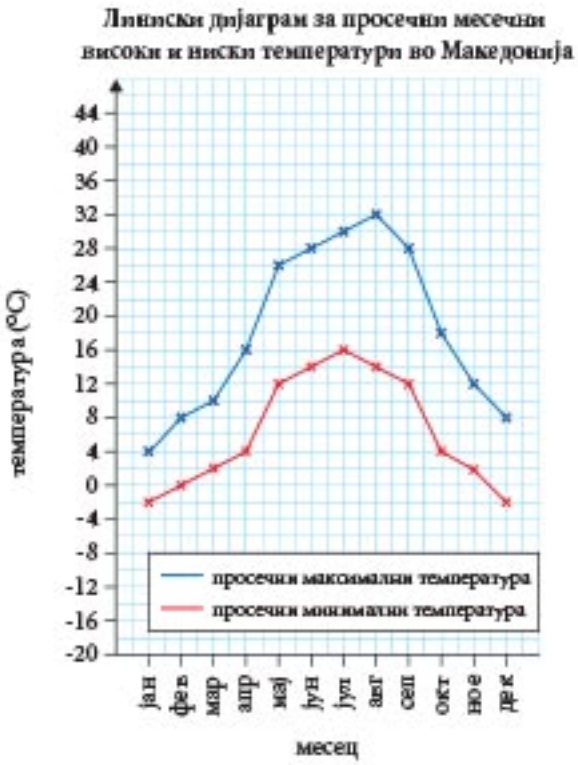
Во табелата се прикажани патувањата на луѓето годишно, во текот на три последователни години.

	2007	2008	2009
Купување	186	198	193
Патување до работа	162	156	147
Службен пат	33	30	30

а) Нацртај повеќекратен столбест дијаграм за да ги прикажеш податоците.

б) Направи споредба на податоците на повеќекратниот столбест дијаграм.

5. На линискиот дијаграм се прикажани просечните месечни високи температури и просечните месечни ниски температури во Македонија.



а) Колкава е просечната ниска температура во јануари?

б) Колкава е просечната висока температура во јануари?

в) Колкава е разликата помеѓу просечната висока и просечната ниска температура во јануари?

г) Во кој месец е забележана најголема разлика помеѓу просечната висока и просечната ниска температура?

д) Еден ден Јован ја проверил надворешната температура. Тој вели дека таа е 28°C. Во кои месеци е најверојатно да биде измерена оваа температура?

6. Марија вели: „Момчињата се повисоки од девојчињата“.

Во табелата се прикажани податоците што ги собрала за неколку тринаесетгодишни ученици.

Висина, h (cm)	Фреквенција на момчиња	Фреквенција на девојчиња
$140 < h \leq 150$	1	4
$150 < h \leq 160$	5	8
$160 < h \leq 170$	10	12
$170 < h \leq 180$	13	6
$180 < h \leq 190$	2	0

а) Нацртај полигон на фреквенција за да ги прикажеш висините на девојчињата и на момчињата.

б) Дали мислиш дека Марија е во право? Објасни го твојот одговор.

7. Тестирани се батерии на два производителa.

Резултатите се прикажани во табелите на фреквенција.

Производител X	
Време, t (часови)	Фреквенција
$0 < t \leq 5$	1
$5 < t \leq 10$	6
$10 < t \leq 15$	2
$15 < t \leq 20$	1

Производител Y	
Време, t (часови)	Фреквенција
$0 < t \leq 5$	1
$5 < t \leq 10$	3
$10 < t \leq 15$	5
$15 < t \leq 20$	1

а) Нацртај полигон на фреквенција за да ги прикажеш двете времиња.

б) Тодор сака да купи една батерија. Кој од двата производителa ќе му го препорачаш? Објасни го твојот одговор.

Користи го полигонот за да одлучиш.

Задачи за повторување

1. Горан се наоѓа на локација А. Бојан се наоѓа на локација Б.

Горан вели: „На локацијата А има поголемо раздвижување отколку на локација Б“.

Тие ги броеле луѓето што поминувале покрај нив во период од половина час, секој ден во текот на 3 недели.

Нивните резултати се следните:

Локација А:

21, 34, 37, 45, 27, 36, 47, 51, 61, 19, 28, 46, 50, 23, 42, 38, 47, 20, 39, 48, 53

Локација Б:

55, 37, 24, 16, 24, 33, 39, 48, 13, 28, 37, 51, 62, 10, 25, 42, 44, 21, 35, 38, 56

а) Нацртај последователен стебло-лист дијаграм за да ги прикажеш податоците.

б) Најди ги медијаната и рангот за локацијата А.

в) Најди ги медијаната и рангот за локацијата Б.

г) Дали Горан е во право? Објасни го твојот одговор.

2. Ангел го истражува купувањето велосипеди.

а) Предложи прашање што би можел да го постави.

б) Кои податоци му се потребни?

в) Дали овие податоци би биле примарни или секундарни?

3. Која е разликата помеѓу примарни и секундарни извори на податоци?

4. Една компанија има 451 вработен.

Менаџерката сака да открие што мислат вработените за кантината во компанијата.

а) Наведи една причина зошто треба да користи примерок.

б) Колку луѓе треба да содржи примерокот?

в) Кој метод за собирање податоци треба да го користи таа?

г) Дали би собрала примарни или секундарни податоци?

д) Таа користи прашалник за собирање на своите податоци.

Запиши две прашања што би можела да ги искористи менаџерката.

5. Ариета истражува колку време учениците во нејзиното одделение поминуваат во читање книги.

Едно од прашањата што ги поставила е: „Колку време поминуваш во читање книги?"

а) Наведи две неправилности на ова прашање.

б) Запиши подобро прашање што би можело да се искористи.

6. Еден фармер го запишувал бројот на јајца што ги несат неговите кокошки во текот на 28 дена:

25	31	42	12	21	31	45	31	20	17
6	15	27	38	41	52	19	26	24	18
15	16	18	27	34	36	41	50		

Запиши ги овие податоци во табела на фреквенција користејќи соодветни класи.

7. Од група наставници добиени се податоци за бројот на работни часови секоја недела.

Тие податоци се прикажани во табелата.

а) Направи процена за просекот на работните часови користејќи средни вредности на класи.

б) Најди ја класата што ја содржи медијаната на работните часови.

Работни часови, h	Фреквенција
$35 < h \leq 40$	1
$40 < h \leq 45$	4
$45 < h \leq 50$	7
$50 < h \leq 55$	15
$55 < h \leq 60$	9
$60 < h \leq 65$	8
$65 < h \leq 70$	3

8. Членовите во еден атлетски клуб ја завршиле трката.

Во табелата се прикажани нивните времиња.

Време, t (минути)	Фреквенција
$30 < t \leq 40$	15
$40 < t \leq 50$	17
$50 < t \leq 60$	11
$60 < t \leq 70$	7

а) Направи процена на просекот на времињата.

б) На трката учествувале неколку тркачи што не се членови на атлетскиот клуб.

Просекот на нивните времиња е 49 минути.

Спореди ги времињата на членовите од атлетскиот клуб со времињата на тркачите што не се членови на клубот.

9. Јордан и Маја ги споредувале услугите на две компании за транспорт А и Б.

Времињата на доцнење се следниве:

Компанија А: 5, 10, 15, 30, 5, 20, 5, 10, 5, 10

Компанија Б: 0, 0 , 30, 40, 0, 10, 15, 25, 10, 0

а) Пресметај ги просекот, медијаната и модата на бројот на минути на доцнење за секоја компанија за транспорт.

б) Јордан вели дека е подобра компанијата А. Наведи една причина зошто Јордан би можел да биде во право.

в) Маја рекла дека е подобра компанијата Б. Наведи една причина зошто Маја би можела да биде во право.

10. Една компанија има 50 вработени.

Табелата ги прикажува позициите, бројот на вработени и месечните плати во денари.

Позиција	Претседател	Директор	Менаџер	Раководител	Квалификуван работник	Општ работник	Хигиеничар
Број на вработени	1	2	4	8	13	18	4
Месечна плата	100000	75000	40000	30000	22000	15000	12000

а) Одреди ги модата, просекот и медијаната на вработените во компанијата.

б) Која статистика најдобро ги претставува податоците? Објасни зошто.

11. Симона се вози со автомобил до работа секој ден.

Таа може да избира меѓу рута А и рута Б.

Во табелите се прикажани нејзините времиња по двете рути во текот на два месеца.

Рута А	
Време, t (минути)	Фреквенција
$5 < t \leq 10$	5
$10 < t \leq 15$	6
$15 < t \leq 20$	12
$20 < t \leq 25$	4
$25 < t \leq 30$	3

Рута Б	
Време, t (минути)	Фреквенција
$5 < t \leq 10$	0
$10 < t \leq 15$	6
$15 < t \leq 20$	21
$20 < t \leq 25$	3
$25 < t \leq 30$	0

а) Процени го просекот на времињата ако се користи рутата А.

б) Процени го просекот на времињата ако се користи рутата Б

в) Која рута општо земено е побрза?

г) Еден ден Симона се успала.

Таа мора да стигне на работа за 25 минути, инаку ќе задоцни на работа.

Која рута треба да ја одбере? Објасни го твојот одговор.

12. Бојана и Мартин помагаат дома за да заработат џепарлак.

Бојана вели: „Јас работам подолго од Мартин".

Тие ги запишувале времињата поминати во работење за секоја недела.

Време, t (минути)	Фреквенција на Бојана	Фреквенција на Мартин
$30 < t \leq 60$	2	3
$60 < t \leq 90$	3	10
$90 < t \leq 120$	5	9
$120 < t \leq 150$	14	4
$150 < t \leq 180$	4	2

а) Нацртај полигон на фреквенција за да ги прикажеш податоците.

б) Дали Бојана е во право? Објасни го твојот одговор.

13. Температурата на воздухот во еден стакленик се мери на секои 30 минути.

Во табелата се прикажани температурите во стакленикот во текот на едно попладне.

Час	12:00	12:30	13:00	13:30	14:00	14:30	15:00	15:30	16:00	16:30	17:00	17:30
Температура (°C)	23	25	27	29	30	30	31	32	31	30	29	26

а) Прикажи ги податоците со линиски дијаграм.

б) Кога првпат температурата достигнала 30°C?

в) Колку долго температурата била 30°C или повисока?

г) Процени ја должината на времето за кое температурата била повисока од 26°C.

6 Број и решавање проблеми

Наставни цели

- Проценува квадратни и кубни корени.
- Користи редослед на операции, вклучувајќи загради и степенувања.
- Ја утврдува употребата на правилата за аритметички и инверзни операции за поедноставување на пресметувањето.
- Го проширува знаењето од ментални методи за пресметување, работејќи со децимални броеви, дропки, проценти и множители, користејќи белешки.
- Решава проблеми со намалување или зголемување во проценти, вклучувајќи едноставни проблеми со лични или домашни финансии, на пример камата, попуст, добивка, загуба и данок.
- Умствено решава текстуални проблеми.
- Одлучува кога да примени дропки или проценти за да се споредат различни количини.
- Прецизно идентификува, организира, претставува и толкува информации во писмена форма, табеларно, графички и со дијаграм.
- Споредува два размера; толкува и користи размер во различни контексти.
- Работи со броеви, алгебарски изрази и равенки и применува често користење алгоритми.
- Препознава кога две величини се правопропорционални; решава проблеми со пропорционалност, на пример премин од една валута во друга.

6.1 Квадратни и кубни корени

Квадратни корени

Целите броеви 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ... ги нарекуваме **полни квадрати.** Полн квадрат е број добиен со множење на произволен цел број самиот со себе.

Квадратен корен е број чиј квадрат е бројот под коренот.

Ако пресметаме квадратен корен од полн квадрат, тогаш ќе го добиеме бројот од којшто е добиен полниот квадрат.

На пример, квадратен корен од 36 е 6.

Така е затоа што $6^2 = 36$.

Пример 1

Запиши ги квадратните корени од:

а) 81 **б)** 169 **в)** 400 **г)** 225

а) $9^2 = 81$, па квадратен корен од 81 е 9.

б) $13^2 = 169$, па квадратен корен од 169 е 13.

в) $20^2 = 400$, па квадратен корен од 400 е 20.

г) $15^2 = 225$, па квадратен корен од 225 е 15.

Би требало да ги научиш напамет полните квадрати до 400.

Квадратниот корен од кој било друг број, на пример $\sqrt{20}$, не е цел број.

Правиме процена на вредноста на коренот, така што ги одредуваме двата полни квадрати меѓу кои се наоѓа таа вредност.

Ја разгледуваме низата полни квадрати.

20

1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 ...

20 е поголем од 16 и помал од 25.

$\sqrt{20}$ е поголем од $\sqrt{16}$ и помал од $\sqrt{25}$.

$\sqrt{20}$ е поголем од 4 и помал од 5.

20 е приближно во средината помеѓу 16 и 25, па квадратниот корен од 20 ќе биде приближно 4,5.

Со калкулатор добиваме $\sqrt{20} = 4{,}47$ заокружено на две децимални места, па 4,5 е добро направена процена.

Пример 2

Направи процена на квадратните корени од следниве броеви:

а) 40 **б)** 55 **в)** 160

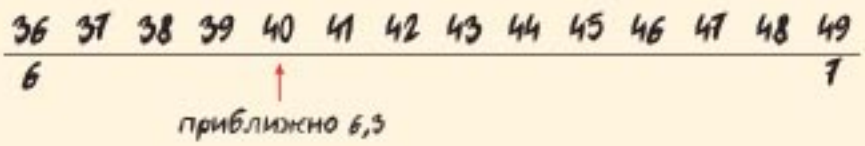
Решенијата провери ги со калкулатор.

а) 40 е помеѓу 36 и 49.

$\sqrt{40}$ е помеѓу 6 и 7.

40 е поблиску до 36 отколку до 49.

Да разгледаме на бројната оска. Квадратниот корен на 40 е приближно 6,3.



Со калкулатор добиваме дека $\sqrt{40} = 6{,}325$ (заокружено на 3 децимални места).

б) 55 е помеѓу 49 и 64.

$\sqrt{55}$ е помеѓу 7 и 8.

55 е поблиску до 49 отколку до 64.

Квадратниот корен на 55 е приближно 7,4.

Со калкулатор добиваме дека $\sqrt{55} = 7{,}416$ (заокружено на 3 децимални места).

в) 160 е помеѓу 144 и 169.

$\sqrt{160}$ е помеѓу 12 и 13.

160 е поблиску до 169 отколку до 144.

Квадратниот корен на 160 е приближно 12,7.

Со калкулатор добиваме дека $\sqrt{160} = 12{,}649$ (заокружено на 3 децимални места).

Кубни корени

Како кај квадратните корени истиот метод го користиме за процена на кубните корени.

Единствена разлика е што негативните броеви имаат негативен кубен корен.

$\sqrt[3]{-125} = -5$ бидејќи $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$

Има непарен број негативни знаци, па резултатот ќе биде негативен.

Полните кубови од 1^3 до 10^3 се:

$\mathbf{1} = 1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1$ $\quad -\mathbf{1} = (-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$

$\mathbf{8} = 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ $\quad -\mathbf{8} = (-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$

$\mathbf{27} = 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3$ $\quad -\mathbf{27} = (-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$

$\mathbf{64} = 4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4$ $\quad -\mathbf{64} = (-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$

$\mathbf{125} = 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$ $\quad -\mathbf{125} = (-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$

$\mathbf{216} = 6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6$ $\quad -\mathbf{216} = (-6)^3 = (-6) \cdot (-6) \cdot (-6)$

$\mathbf{343} = 7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7$ $\quad -\mathbf{343} = (-7)^3 = (-7) \cdot (-7) \cdot (-7)$

$\mathbf{512} = 8^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8$ $\quad -\mathbf{512} = (-8)^3 = (-8) \cdot (-8) \cdot (-8)$

$\mathbf{729} = 9^3 = 9 \cdot 9 \cdot 9$ $\quad -\mathbf{729} = (-9)^3 = (-9) \cdot (-9) \cdot (-9)$

$\mathbf{1000} = 10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10$ $\quad -\mathbf{1000} = (-10)^3 = (-10) \cdot (-10) \cdot (-10)$

Би требало да ги научиш напамет првите неколку кубови: 1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3 и 10^3.

Пример 3

Процени ги следните броеви:

а) $\sqrt[3]{20}$ **б)** $\sqrt[3]{-140}$ **в)** $\sqrt[3]{750}$

а) 20 е помеѓу 8 и 27.

$\sqrt[3]{20}$ е помеѓу 2 и 3.

20 е поблиску до 27 отколку до 8.

$\sqrt[3]{20}$ е приближно 2,7.

б) -140 е помеѓу -125 и -216.

$\sqrt[3]{-140}$ е помеѓу -5 и -6.

-140 е поблиску до -125 отколку до -216.

$\sqrt[3]{-140}$ е приближно $-5{,}2$.

в) 750 е помеѓу 729 и 1000.

$\sqrt[3]{750}$ е помеѓу 9 и 10.

750 е поблиску до 729 отколку до 1000.

$\sqrt[3]{750}$ е приближно 9,1.

Задачи

1. Препиши и направи процена за $\sqrt{70}$, а потоа дополни за да бидат точни следниве тврдења.

70 е помеѓу 64 и .....

$\sqrt{70}$ е помеѓу ..... и .....

70 е поблиску до ..... отколку до .....

$\sqrt{70}$ е приближно еднаков на .....

2. Пресметај ги следниве квадратни корени. Решенијата провери ги со калкулатор.

а) $\sqrt{5}$ **б)** $\sqrt{15}$ **в)** $\sqrt{45}$ **г)** $\sqrt{90}$ **д)** $\sqrt{300}$

ѓ) $\sqrt{200}$ **е)** $\sqrt{380}$ **ж)** $\sqrt{265}$ **з)** $\sqrt{180}$ **ѕ)** $\sqrt{125}$

3. **а)** Пресметај ги вредностите на 21^2 и 22^2.

б) Искористи го решението под **а)** за да процениш колку е $\sqrt{450}$.

в) Провери ги твоите решенија со калкулатор.

4. Запиши ги сите полни кубови помеѓу 1 и 1000.

5. Искористи го решението на задача **4** за да ги процениш следните кубни корени.

Провери ги решенијата со калкулатор.

а) $\sqrt[3]{4}$ **б)** $\sqrt[3]{30}$ **в)** $\sqrt[3]{90}$ **г)** $\sqrt[3]{200}$ **д)** $\sqrt[3]{-50}$

ѓ) $\sqrt[3]{-500}$ **е)** $\sqrt[3]{950}$ **ж)** $\sqrt[3]{-120}$ **з)** $\sqrt[3]{-10}$ **ѕ)** $\sqrt[3]{350}$

6. Дадена е бројна шема со квадратни броеви.

$1^2 - 0^2 = 1 + 0 = 1$

$2^2 - 1^2 = 2 + 1 = 3$

$3^2 - 2^2 = 3 + 2 = 5$

$4^2 - 3^2 = \_\_ + \_\_ = 7$

$5^2 - 4^2 = \_\_ + \_\_ = \_\_$

$6^2 - 5^2 = \_\_ + \_\_ = \_\_$

а) Препиши ја шемата и пополни ги празните места.

б) Дополни ги следните два реда од шемата.

в) Пресметај: **i** $10^2 - 9^2$ **ii** $16^2 - 15^2$

Користи го истото правило од шемата.

7. Марко и Матеј разговараат за домашната работа.

Марко вели дека $\sqrt{-100} = -10$ бидејќи $\sqrt{100} = 10$.

Матеј вели дека $\sqrt{-100}$ не може да се пресмета бидејќи негативните броеви немаат квадратен корен.

Кој е во право?

Обиди се да пресметаш $(-10)^2$. Што ќе се случи ако помножиш два негативни броја?

6.2 Редослед на операции

Редоследот по кој се извршуваат операциите во еден израз е многу важен.

Во VIII одделение учевме за редоследот на извршување операции:

Загради

Степени

Делење
Множење

Собирање
Одземање

Операциите се запишани по редослед на извршување. Прво се извршуваат операциите во загради. Потоа се извршува степенувањето.

Делењето и множењето се операции со иста важност и можат да се извршуваат истовремено.

Собирањето и одземањето, исто така, имаат иста важност и нив ги извршуваме на крај.

Пример 1

Пресметај: $24 + 4^2 \cdot (9 - 7) - 27 : 3$

$24 + 4^2 \cdot (9 - 7) - 27 : 3$ Прво пресметуваме во заградите.

$= 24 + 4^2 \cdot 2 - 27 : 3$ Потоа ги пресметуваме степените.

$= 24 + 16 \cdot 2 - 27 : 3$ Потоа делење и множење.

$= 24 + 32 - 9$ На крај, собирање и одземање.

$= 47$

Пример 2

Употреби загради за да биде точно следното равенство:

$21 - 12 : 6 - 2^2 = 23$

Ставаме загради на неколку различни места.

а) Без загради

$21 - 12 : 6 - 2^2$

$= 21 - 12 : 6 - 4$

$= 21 - 2 - 4 = 15$ Ова не е точно.

б) $(21 - 12) : 6 - 2^2$

$= 9 : 6 - 2^2$

$= 9 : 6 - 4$

$= 1\frac{1}{2} - 4 = -2\frac{1}{2}$ Ова не е точно.

в) $21 - 12 : (6 - 2^2)$

$= 21 - 12 : 2$

$= 21 - 6 = 15$ Ова не е точно.

г) $21 - (12 : 6 - 2^2)$

$= 21 - (12 : 6 - 4)$

$= 21 - (2 - 4)$

$= 21 - (-2) = 23$ Ова е точно.

Само во последниот случај заградите се правилно употребени.

Задачи

Пресметај:

1. $17 - 5 \cdot 3$ **2.** $32 : 8 + 3^2$ **3.** $69 - 52 \cdot 2$

4. $7 + 3 \cdot 4$ **5.** $3 \cdot 5 + 6 \cdot 2$ **6.** $9 \cdot 4 - 20 : 5$

7. $6 \cdot (3 + 2)$ **8.** $12 : (8 - 4)$ **9.** $9 \cdot (2 + 3) \cdot 10$

10. $3^2 - 2^2 \cdot 2$ **11.** $(3^2 - 2^2) \cdot 2$ **12.** $60 : 2^2 - 8$

13. $36 - 5^2 + 2 \cdot 3$ **14.** $3 \cdot (4^2 - 3^2)$ **15.** $(5 + 2 \cdot 4)^2$

16. $2^3 + 3^3 \cdot 2$ **17.** $17 + 3^2 \cdot (6 - 2)$ **18.** $12^2 - (2 + 7 \cdot 4)$

19. $36 - 3^3 : (12 - 9) - 2^3$ **20.** $(1 + 2)^3 + 4 \cdot 5 - 6$

Употреби загради, таму каде што се неопходни, за равенствата да бидат точни.

21. $12 + 3 \cdot 2 = 30$ **22.** $5 \cdot 8 - 3 = 25$ **23.** $32 : 8 - 4 = 8$

24. $36 : 3 + 6 \cdot 2 = 8$ **25.** $5^2 - 7 \cdot 2 = 36$ **26.** $9 - 7 \cdot 3^2 = 18$

27. $2^3 + 1 \cdot 3^2 + 1 = 90$ **28.** $6 + 2 \cdot 5^2 = 56$

29. Марко запишал едно равенство, но ги заборавил заградите.

$5 + 12 \cdot 3 - 1 = 2 + 3 \cdot 6 - 1$

За да биде точно равенството, употреби загради во изразите од двете негови страни.

Треба да ставаш загради на повеќе различни места пред да го најдеш точниот запис на равенството.

6.3 Зголемување и намалување со проценти

Компаниите, како и некои физички лица, плаќаат даноци.

Луѓето плаќаат данок на парите што ги заработуваат и на парите што ги трошат.

Данокот се изразува во проценти, па истата пропорција се плаќа за различни општи суми.



За да зголемиме една величина за одреден процент, го наоѓаме процентот од таа величина и добиениот број го додаваме на почетната величина.

За да намалиме една величина за одреден процент, го наоѓаме процентот од таа величина и добиениот број го одземаме од почетната величина.

Пример 1

Бројот на жители во едно село е 260.

Се очекува следната година тој да се зголеми за 5%.

Пресметај колкав е очекуваниот број жители во селото.

$\frac{5}{100} \cdot 260 = 13$ Ова е зголемувањето.

$260 + 13 = 273$ Го додаваме зголемувањето.

Очекуваниот број жители е 273.

Пример 2

Еден велосипед се продава за 12500 денари.

Неговата цена е намалена за 15%.

Одреди ја новата цена на велосипедот?

$\frac{15}{100} \cdot 12500 = 1875$ Ова е намалувањето.

$12500 - 1875 = 10625$ Го одземаме намалувањето.

Велосипедот по намалувањето чини 10625 денари.

Примена на проценти

Кога една продавница купува производ и го продава поскапо отколку што платила за него, разликата во цената ја нарекуваме **добивка** (**профит**). Кога една продавница продава производ за пониска цена од набавната, тогаш разликата се нарекува **загуба**.

Кога имаме пари во банка, за нив банката ни плаќа камата. Таа обично се плаќа на крајот од годината. На пример, каматна стапка од 5% секоја година често се опишува како 5% **годишно**. Ако каматата не се додава на сметката, тогаш станува збор за **проста камата**.

Цените најчесто се прикажани со вклучен данок, понекогаш се дадени и без данок. Стапките на данок се различни, во зависност од тоа што се продава и во која држава се врши продажбата.

Пример 3

Марија продава колачи во својата продавница.

Изработката на едно колаче чини 30 денари.

Таа сака да оствари добивка од 80%.

Колкава треба да биде цената на едно колаче?

$\frac{80}{100} \cdot 30$ денари $= 24$ денари.

Ова е добивката што сака да ја оствари, 80% од цената на чинење.

30 денари $+ 24$ денари $= 54$ денари.

Значи, мора да го продава секое колаче за 54 денари.

Пример 4

Никола има заштеда од 5000 денари во банка.

Добива проста камата од 6% годишно на својата заштеда.

Колкава камата треба да добие Никола ако ги остави парите во банка две години?

$\frac{6}{100} \cdot 5000 = 300$ денари — Ова е каматата што ја добива секоја година.

300 денари $\cdot$ 2 = 600 денари

Вкупната камата е 600 денари.

Одредување процент

Понекогаш треба да одредиме број што е дропка или процент од друг број.

За да го направиме тоа, прво го запишуваме бараниот број како дропка, а потоа ја претвораме таа дропка во процент.

Кога пресметуваме зголемување или намалување на некоја вредност, ние всушност ја споредуваме промената со оригиналната вредност.

Пример 5

Тања купила велосипед за 7500 денари.

Подоцна го продала за 6500 денари.

Пресметај колку проценти е во загуба.

Запиши го решението заокружено на едно децимално место.

7500 − 6500 = 1000 денари — Ова е загубата кога го продала велосипедот.

$\frac{1000}{7500} \cdot 100 = 13{,}(3)\% = 13{,}3\%$ (на 1 д.м.) — Ова е загубата како процент од оригиналната цена.

Загубата на Тања е 13,3% (на 1 д.м.).

Пример 6

Софија полагала неколку тестови по математика.

Добила 25 поени од можни 30 поени на тестот за дропки.

Добила 34 поени од можни 40 поени на тестот за веројатност.

Добила 48 поени од можни 60 поени на тестот за низи.

На кој тест Софија постигнала најдобар резултат?

На кој тест Софија постигнала најслаб резултат?

Тестовите имаат различни вредности, па потребно е да ги најдеме процентите и потоа да ги споредиме.

Тест за дропки: $\frac{25}{30} \cdot 100 = 83{,}3\%$ (на 1 д.м.)

Тест за веројатност: $\frac{34}{40} \cdot 100 = 85\%$

Тест за низи: $\frac{48}{60} \cdot 100 = 80\%$

Софија постигнала најдобар резултат на тестот за веројатност. Најслаб резултат постигнала на тестот за низи.

Задачи

1. Една туристичка агенција ги зголемила сите цени за 15%.

Пресметај ги новите цени за билетите што претходно чинеле:

а) 1200 денари **б)** 2400 денари **в)** 3600 денари

2. Во една продавница има намалување од 25% на сите цени.

Најди ја новата, намалена цена на:

а) телевизор, чија оригинална цена била 28000 денари.

б) мемориска картичка, чија оригинална цена била 1400 денари.

в) фотоапарат, чија оригинална цена била 6000 денари.

3. Банката плаќа 3% годишна проста камата на сите депозити во евра.

Пресметај ја каматата што ќе им се исплати на крајот на годината на:

а) Марија, која имала банкарски депозит од 250 евра.

б) Лилјана, која имала банкарски депозит од 320 евра.

в) Коста, кој имал банкарски депозит од 280 евра.

4. Една вреќа цемент се продава за 386 денари плус данок.

Данокот е 18%.

Колку треба да се плати за една вреќа цемент?

5. На сликата е прикажано мени од ресторан.

Ресторанот наплаќа 10% надоместок за услуги на сите цени.

Пресметај колку чини секој вид пица, вклучувајќи го надоместокот за услуги.



6. Александар има 36000 денари.

Тој потрошил 3000 денари за чевли и 2400 денари за кошула.

Колкав процент од парите потрошил Александар?

7. Али продава лимонада во шишиња од 1 литар.

Трошоците за производување 1 литар лимонада се 60 денари.

Тој ја продава лимонадата по 75 денари за литар.

а) Колкава е неговата добивка во проценти?

б) Продал 20 литри. Колкава е неговата вкупна добивка?

8. Во табелата се прикажани вкупната површина и водената површина на 5 држави.

Држава	Вкупна површина (km^2)	Водена површина (km^2)
Австралија	7741220	58920
Канада	9984670	891163
Белгија	30528	250
Уругвај	176215	1200
Гана	238533	11000

Најди го процентот на водена површина во секоја од петте држави.

Решенијата заокружи ги на две децимални места.

9. Елена купила кујна што чинела 24000 денари.

Таа платила 35% од вкупната цена, а остатокот требало да го плати на 24 еднакви месечни рати.

Колку изнесува нејзината месечна рата?

Прво одземи ја сумата што ја платила.

10. Во табелата се прикажани податоци за бројот на ученици и ученички во програмата за дообразование во една држава меѓу 1970 и 2008 година.

Ученици (илјади)			
1970/71	1980/81	1990/91	2007/08
116	154	219	520

Ученички (илјади)			
1970/71	1980/81	1990/91	2007/08
95	196	261	534

а) Пресметај ги промените во проценти од 1970/71 до 1980/81 година за:

I ученици **II** ученички.

б) Пресметај ги промените во проценти од 1990/91 до 2007/08 година за:

I ученици **II** ученички.

в) Пресметај го процентот само на ученици во секоја година, прикажани во табелата.

г) Што може да се каже за промените на процентите под **в)**?

Спореди ја промената со оригиналната вредност.

Проценти над 100 и под 100

Понекогаш треба да ги одредиме големините на величините пред да ја пресметаме промената во проценти.

Треба внимателно да ја прочитаме задачата за да откриме дали вредноста на величината во задачата е зададена пред или по промената на процентот.

За да ја пресметаме вредноста пред промената:

- го пресметуваме вкупниот процент
- делиме за да најдеме 1%
- потоа множиме со 100 за да ја најдеме вредноста пред пресметувањето на процентот.

Пример 7

Андреј требало да плати сметка од 528 денари во ресторан.

Сметката вклучувала и 10% надоместок за услуги.

Колкав бил износот што требало да го плати Андреј пред да се додаде надоместокот за услуги?

Оригиналната сметка е 100%.

$10\% + 100\% = 110\%$ Ова е оригиналната цена плус надоместокот на услуги.

528 денари се 110%.

$1\% = \frac{528}{110}$ денари $= 4{,}8$ денари Делиме со 110 за да ја најдеме вредноста на 1%.

$100\% = 100 \cdot 4{,}8$ денари $= 480$ денари

Сметката била 480 денари.

Пример 8

Цената на еден велосипед е намалена за 15% при распродажба.

Сега се продава за 5950 денари.

Колкава била неговата оригинална цена?

Оригиналната цена е 100%.

$100\% - 15\% = 85\%$

5950 денари е 85%. Ова е оригиналната цена намалена за намалувањето.

$1\% = \frac{5950}{85}$ денари $= 70$ денари Делиме со 85 за да ја најдеме вредноста на 1%.

$100\% = 100 \cdot 70$ денари $= 7000$ денари Множиме со 100 за да ја најдеме вредноста на 100%.

Оригиналната цена била 7000 денари.

Задачи

1. Шпорет се продава по цена, намалена за 25%.

Намалената цена е 3150 денари.

Колкава била неговата оригинална цена?

2. Сад за готвење се продава на распродажба.

На ливчето залепено на садот пишува „20% попуст“.

Заштедата е 49 денари.

Колкава била неговата оригинална цена?

3. Во 2011 година музејот го посетиле 14400 луѓе.

Тоа е зголемување за 20% во споредба со 2010 година.

Колку луѓе го посетиле музејот во 2010?

4. Панталони се продаваат на распродажба за 960 денари.

Нивната оригинална цена е намалена за 40%.

Пресметај ја оригиналната цена.

5. Марко добил 300 денари камата за својот банкарски депозит на крајот од годината.

Каматната стапка е 6%.

Пред да се исплати камата, од неа се одбиваат 20% за данок.

Пресметај ја прво каматата пред одбивањето на данокот.

Покажи дека неговиот банкарски депозит бил 6250 денари.

6. Цената на еден стол е намалена за 30%.
Намалувањето изнесува 450 денари.
Колкава е неговата намалена цена?

6.4 Споредување размер

Размерот го користиме за споредба на една величина со друга. Таа споредба уште ја нарекуваме **сооднос**.

Веќе учевме како се пресметуваат размери кога треба да одредиме големина на делови.

Црвени и бели џамлии измешани во размерот 3 : 7 значи 3 дела црвени џамлии и 7 дела бели џамлии.

Има вкупно десет дела.

$\frac{3}{10}$ од џамлиите се црвени, а $\frac{7}{10}$ се бели.

Преку следните три примери ќе разгледаме сооднос на повеќе величини.

Пример 1

Подели 2352 денари во сооднос 3 : 4 : 1

$3 + 4 + 1 = 8$ Ги собираме размерите за да го најдеме вкупниот број мали делчиња.

$2352 : 8 = 294$ Делиме за да ја најдеме големината на едно делче.

$294 \cdot 3 = 882$ Множиме за да ја најдеме големината на секој дел.

$294 \cdot 4 = 1176$

$294 \cdot 1 = 294$

Трите дела се: 882 денари, 1176 денари и 294 денари.

Проверуваме дали одговорот е точен со собирање на трите дела.
$882 + 1176 + 294 = 2352$ ✓

Пример 2

Сообносот на момчињата наспрема девојчињата на училишна екскурзија е 3 : 2.

На екскурзијата имало 46 девојчиња.

Колку момчиња имало на екскурзијата?

Збирот на размерите е 5, па има вкупно 5 делчиња.

2 дела се девојчиња.

2 дела = 46 — Започнуваме од тоа што го знаеме.

1 дел = 46 : 2 = 23 — Делиме за да најдеме колкаво е едно делче.

3 дела = 23 · 3 = 69 — Множиме за да го најдеме бараниот број момчиња.

На екскурзијата имало 69 момчиња.

Пример 3

Во една кутија има црвени и сини топчиња во сооднос 4 : 5.

Колкав дел од топчињата се црвени? Запиши како дропка.

4 + 5 = 9 — Ги собираме размерите за да го добиеме вкупниот број делчиња.

4 дела од вкупно 9 дела се црвени.

$\frac{4}{9}$ од топчињата се црвени.

Задачи

1. Скрати ги следниве размери до нивната најпроста форма.

а) 15 : 25 **б)** 36 : 54 **в)** 81 : 45 **г)** 56 : 48 **д)** 80 : 32

2. Упрости ги следните размери. Решенијата запиши ги во најпроста форма.

а) 400 g : 1,2 kg **б)** 1,5 m : 40 cm

в) 2 дена : 8 часа **г)** 600 ml : 2,4 l

д) 25 mm : 4 cm **ѓ)** 450 m : 1 km

Претвори ги двете страни на размерот во исти мерни единици.

3. Запиши ги следниве размери во нивната најпроста форма.

а) 36 : 45 : 27 **б)** 12 : 24 : 18 **в)** 0,5 : 1,5 : 2 **г)** 150 : 240 : 570

4. Готвачката има три вреќички брашно.



Вреќичката А има маса 500 g, вреќичката Б има маса 750 g и вреќичката В има маса 1,5 kg.

Пресметај го сообносот на масата на вреќичката А наспрема вреќичката Б наспрема вреќичката В. Упрости го решението.

5. Подели ги следните величини во даденият сооднос.

а) 400 денари во сооднос 4 : 1 **б)** 120 cm во сооднос 3 : 2 **в)** 38,7 денари во сооднос 5 : 4

г) 350 денари во сооднос 3 : 2 **д)** 576 km во сооднос 3 : 5 **ѓ)** 660 m во сооднос 10 : 1

6. Христина, Ива и Бети поделиле 1050 денари во сооднос 3 : 2 : 1.

Пресметај колку добила секоја од нив.

7. Аглите во триаголникот се во сооднос 5 : 4 : 3.

Пресметај ја големината на најмалиот агол во степени.

8. Аглите во четириаголникот се во сооднос 2 : 3 : 3 : 7.

Пресметај ја големината на најголемиот агол во степени.

9. Сообносот на возрасните лица и децата во еден автобус е 1 : 9.

Колкава дропка од луѓето во автобусот се деца?

10. $\frac{5}{8}$ од децата во училиштето се девојчиња.

Пресметај го сообносот на девојчињата наспрема момчињата.

11. Парче лента е пресечено во сооднос 5 : 3.

Пократкото парче е долго 45 cm.

Колкава е должината на подолгото парче?

12. Во кутија има црни и бели топчиња во сооднос 7 : 4.

Во кутијата има 42 црни топчиња.

Пресметај колку вкупно топчиња има во кутијата.

13. Годините на Ана и на Мими се во сооднос 3 : 5.

Мими е 6 години постара од Ана.

а) Пресметај колку години има секоја од нив.

б) Кој ќе биде сообносот на нивните години по една година? Упрости го решението.

И двете ќе бидат една година постари отколку во решението под **а)**.

14. Во една кошница има црвени, зелени и сини топчиња.

Има еднаков број зелени и сини топчиња.

Веројатноста да се избере црвено топче од кошницата е $\frac{3}{7}$.

Пресметај го сообносот црвени топчиња : зелени топчиња : сини топчиња.

Пресметај ја веројатноста да се избере едно сино топче и веројатноста да се избере едно зелено топче. Овие две веројатности мораат да бидат еднакви.

15. На мапата е запишан размерот 1 : 25000.

а) Улицата на мапата е долга 6,4 cm.

Пресметај ја вистинската должина на улицата во километри.

Прво пресметај го растојанието во сантиметри.

б) Должината на аеродромската писта е 2,5 km.

Колку е долга пистата на мапата?

Прво претвори ги километрите во сантиметри.

в) Правоаголна плантажа има димензии 3 cm и 1,6 cm на мапата.

Пресметај ја нејзината плоштина во хектари.

1 хектар (ha) = 10 000 m²

Еквивалентни размери

Често се случува да треба да споредуваме размери.

За да покажеме дека размерите се еквивалентни, со скратување ги доведуваме до нивната најпроста форма.

Ако размерите се еднакви кога се сведени во нивната најпроста форма, тогаш тие се **еквивалентни размери**.

Пример 4

Спореди ги размерите 35 : 84 и 60 : 144 и провери дали се еквивалентни.

Упростувајќи го секој од размерите, добиваме:

35 : 84 = **5 : 12** Ги делиме двата броја со 7.

60 : 144 = 30 : 72 Ги делиме двата броја со 2.

= **5 : 12** Ги делиме двата броја со 6.

Ова упростување можеме да го направиме во еден чекор, ако поделиме со 12.

Двата размери се еквивалентни бидејќи се еднакви на 5 : 12.

Единични размери

Ако размерите се различни, нивните најпрости форми не се секогаш лесни за споредба.

Во таквите случаи користиме два начина.

Првиот од нив е со претворање во **единичен размер**.

Единичен размер е размер во форма 1 : n или n : 1.

Досега при упростување на размерите се користеа цели броеви.

Кај единичните размери честопати вредноста на n не е цел број.

Пример 5

Училиштето А има 565 ученици и 27 наставници.

Училиштето Б има 840 ученици и 37 наставници.

Кое училиште има помал сооднос, ученик наспрема наставник?

Соодносот ученик наспрема наставник во училиштето А е 565 : 27.

Тој размер не може да се упрости бидејќи 565 и 27 немаат заеднички делители.

Разложувањата на простите делители на двата броја се $565 = 113 \cdot 5$ и $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$. Значи немаат заеднички делители.

Соодносот ученик наспрема наставник во училиштето Б е 840 : 37.

Тој размер не може да се упрости бидејќи 840 и 37 немаат заеднички делители.

Разложувањата на простите делители на двата броја се $840 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, а 37 е прост број. Значи, немаат заеднички делители.

Размерите не се еквивалентни бидејќи имаат различни најпрости форми.

Двата размери ќе ги претвориме во единични размери.

Училиште А: $565 : 27 = \frac{565}{27} : 1$ Ги делиме двете страни со 27.

$= \mathbf{20{,}9 : 1}$ На едно децимално место.

Училиште Б: $840 : 37 = \frac{840}{37} : 1$ Ги делиме двете страни со 37.

$= \mathbf{22{,}7 : 1}$ На едно децимално место.

Во училиштето А има 20,9 ученици по наставник, а во училиштето Б има 22,7 ученици по наставник.

Училиштето А има помал сооднос, ученик наспрема наставник.

Примена на проценти

Втор начин за споредба на размери е да ги претвориме размерите во проценти.

Ова е корисно кога треба да ја одредиме едната величина како процент од другата.

За да го примениме овој начин, величините ги запишуваме како дропки и дропките ги претвораме во проценти.

Пример 6

Иво измешал 240 ml црвена боја со 560 ml бела боја.

Елена измешала 0,75 l црвена боја со 1,25 l бела боја.

Која мешавина од бои има поголем процент на црвена боја?

Смесата на Иво има 240 ml црвена боја од вкупно 800 ml.

Тоа е $\frac{240}{800}$ како дропка.

$\frac{240}{800} = 240 : 800 = 0{,}3$

$0{,}3 = 0{,}3 \cdot 100\% = \mathbf{30\%}$

Дропката ја претвораме во децимален број, а потоа децималниот број го претвораме во процент.

Смесата на Елена има 0,75 l црвена боја од вкупно 2 l.

Тоа е $\frac{0{,}75}{2}$ како дропка.

$\frac{0{,}75}{2} = 0{,}75 : 2 = 0{,}375$

$0{,}375 = 0{,}375 \cdot 100\% = \mathbf{37{,}5\%}$

Смесата на Елена има повисок процент на црвена боја.

Задачи

1. Упрости ги паровите размери и утврди дали тие се еквивалентни размери.

а) 15 : 25 и 12 : 18 **б)** 36 : 16 и 45 : 20 **в)** 25 : 40 и 35 : 55

г) 21 : 56 и 18 : 48 **д)** 20 : 30 и 32 : 48 **ѓ)** 48 : 60 и 28 : 35

2. Запиши ги следните размери во форма $1 : n$.

а) 4 : 7 **б)** 5 : 8 **в)** 6 : 3

г) 8 : 10 **д)** 10 : 8

3. На училишните екскурзии соодносот ученик и наставник мора да биде помал од 9 : 1.

На една еднодневна екскурзија има 128 ученици и 15 наставници.

а) Пресметај го соодносот ученик наспрема наставник за оваа екскурзија во форма $n : 1$.

б) Дали има доволно наставници на екскурзијата?

4. Денис измешал 28 kg земја со 7 kg ѓубриво.

Горан измешал 63 kg земја со 17 kg ѓубриво.

а) Пресметај го процентот на ѓубриво во секоја од смесите.

б) Кој има поголем процент на ѓубриво?

5. Двајца градинари измешале семиња за нивните тревници.

Драган измешал 5 kg трева со 2 kg евроазиска трева што се користи како сточна храна.

Васко измешал 3,6 kg трева со 17 kg евроазиска трева.

а) Пресметај го процентот на евроазиска трева во секоја смеса.

б) Чија смеса има повисок процент на евроазиска трева?

6. Александар и Марко измешале пијалаци за забавата.

Александар измешал 1,8 литри овошен сок со 12 литри вода.

Марко измешал 2,5 литри овошен сок со 17,5 литри вода.

Пресметај го процентот на овошен сок во секој пијалак.

Прво пресметај колкав дел би добила со секој од методите. Потоа спореди ги со користење децимални броеви или проценти.

7. Маријана има 10 години, а Андреа има 7 години.

Нивната баба има подготвено џепарлак за нив.

Таа предлага два начина на кои тие можат да ги поделат парите.

Првиот начин е да ги поделат според размерот на нивните години.

Вториот начин е да ги поделат според броевите на букви во нивните имиња.

Што мислиш, кој начин е посоодветен за Маријана? Објасни зошто.

8. Дадени се четири размери:

21 : 35 : 14 36 : 60: 24 27 : 45 : 15 45 : 75 : 30

Три од овие четири размери се еквивалентни, а еден е различен од нив.

Упрости го секој размер.

Пресметај кои размери се еквивалентни, а кој се разликува од останатите.

Прикажи ја целата постапка.

6.5 Пропорционалност

Историски гледано, државите развиле сопствени валути, односно сопствени монетарни системи.



Некои валути, како американскиот долар ($), еврото(€) или британската фунта (£), се добро познати и имаат нашироко препознатливи симболи.

Најголем број држави имаат банки или менувачници во кои се врши замена на една валута во друга. Оваа замена е заснована на фактот дека валутите се правопропорционални меѓу себе.

Банките или менувачниците често ги има на пристаништата, аеродромите и на главните железнички станици, каде што луѓето главно пристигнуваат во државата.

Права пропорција

Ако сообносот (количникот) на две величини е секогаш ист, за тие величини велиме дека се **правопропорционални**.

На пример, ако автомобилот користи гориво со константна потрошувачка, патот што ќе го помине тој автомобил е правопропорционален со количеството потрошено гориво. Кога возиме четири пати подолго, ќе потрошиме четири пати повеќе гориво.

За решавање најголем број задачи што вклучуваат права пропорција можеме да користиме множење или делење.

За решавање вакви задачи користевме графици.

Понекогаш е подобро да го користиме сообносот на двете величини.

Пример 1

Ангел возел 144 km и потрошил 9 литри гориво.

Пресметај колку гориво ќе му биде потребно за 400 km.

За 144 km се трошат 9 литри гориво.

За 1 km се трошат $\frac{9}{144}$ литри гориво.

Единичен метод: делиме за да го најдеме количеството што се троши за 1 km, а потоа множиме за да го најдеме решението.

За 400 km ќе се потрошат $\frac{9}{144} \cdot 400$

$$= \frac{9 \cdot 400}{144}$$
$$= \frac{3600}{144}$$
$$= 25$$

На Ангел ќе му бидат потребни 25 литри гориво.

Пример 2

На сликата се прикажани две кутии со житарки за појадок.



Дали масата на ореви во секое пакување е правопропорционална со вкупната маса на пакувањето?

Сообносот на ореви и вкупната маса на пакувањето е:

Стандардно пакување $45 : 300 = 3 : 20$ Подели со 15 за да го упростиш размерот.

Специјално пакување $66 : 440 = 3 : 20$ Подели со 22 за да го упростиш размерот.

Двете пакувања имаат ист сооднос на масата на ореви и вкупната маса на пакувањето.

Масата на ореви е правопропорционална со вкупната маса на пакувањето.

Пример 3

Теа добива 624 денари за осумчасовна работа.

Линдита добива 390 денари за петчасовна работа.

Пресметај дали тие се исто платени од еден час.

За секоја од нив надоместокот е правопропорционален со бројот на работни часови.

Сумата за еден час за секоја од нив е:

Теа	$624 : 8 = 78$	Теа е платена 78 денари на час.
Линдита	$390 : 5 = 78$	Линдита е платена 78 денари на час.

И двете се исто платени за еден час.

Стапки на размена

Зборот „стапка“ го користиме за да ја опишеме пропорционалноста помеѓу различни мерни единици.

Општ вид на стапка е девизниот курс.

Сумите пари во двете различни валути се правопропорционални.

Пример 4

Ања разменила 120$ во евра и добила 91,20€.

а) Пресметај го девизниот курс за размена на долари во евра.

Истовремено, Коста разменил 250$ во евра.

б) Пресметај колку евра добил тој.

а) Девизниот курс е вредноста добиена за 1 долар.

$120\$ = 91{,}20€$

$1\$ = 91{,}20€ : 120$

$= 0{,}76€$

Девизниот курс е $1\$ = 0{,}76€$

б) Го користиме девизниот курс под **а)**:

$250 \cdot 0{,}76 = 190$

Коста добил 190€.

Задачи

1. 7 метри платно чинат 1729 денари.

Пресметај колку треба да се плати за 12 метри платно по истата цена.

2. 3 килограми брашно чинат 102 денари.

Пресметај колку чинат 5 килограми брашно по истата цена.

3. Дејан добил 935 денари за $5\frac{1}{2}$ часа работа.

Колку ќе добие ако работи 8 часа?

4. 55 литри гориво чинат 5280 денари.

Колку треба да се плати за 68 литри од истото гориво?

5. x и y се две променливи.

Кога $x = 12$, $y = 40$

Кога $x = 30$, $y = 100$

Дали x и y се правопропорционални? Објасни го одговорот.

6. Треба да споредиме две тегли џем од јагоди.



Малата тегла џем има 225 g јагоди во 500 g џем.

Големата тегла џем има 324 g јагоди во 720 g џем.

Дали масата јагоди е правопропорционална на вкупната маса од џем?

Објасни го одговорот.

7. Табелата ги прикажува количествата шеќер во кутии со различни пакувања житарки.

	Пакување А	Пакување Б	Пакување В	Пакување Г
Маса шеќер	75 g	150 g	100 g	54 g
Маса житарки	500 g	1 kg	700 g	360 g

а) Пресметај го процентот на шеќер во секое пакување житарки.

б) Дали масата на шеќер е правопропорционална со масата на житарките?

Ако величините се правопропорционални, тогаш процентите ќе бидат еднакви.

8. Антонија добила 1440 денари за осумчасовна работа.

Стефи добила 1936 денари за 11-часовна работа.

а) Пресметај колку е платена секоја од нив за 1 час.

б) Дали тие се исто платени за еден час?

9. Девизниот курс помеѓу еврото и денарот е 1€ = 61,69 денари.

а) Претвори 120€ во денари.

б) Претвори 200 денари во евра.

Заокружи ги решенијата на најблискиот денар, односно на најблискиот цент.

10. Андреј живее во Кавадарци и сака да ги посети родниците во Канада на одмор.

Тој разменил 37700 денари во канадски долари на почетокот на одморот.

Курсот за размена помеѓу канадскиот долар и денарот е
1 канадски долар (CAD) = 41,97 денари.

а) Пресметај колку канадски долари добил Андреј?

На крајот од одморот, му останале 65 канадски долари.

Ги претворил во денари според истиот курс.

б) Пресметај колку денари добил, заокружени на најблискиот денар.

11. Јован и Елена се подготвуваат за патување во САД.

Јован претворил 24205 денари во 435$.

Елена претворила 30385 денари по истиот девизен курс, заокружен на 2 децимални места.

Пресметај колку долари добила таа. Заокружи на две децимални места.

12. На почетокот на одморот на Црно Море во Бугарија, Стојан разменил 500€ во 980 бугарски лева.

На крајот од одморот му останале 100 лева.

Тој ги претворил левовите во евра по истиот девизен курс.

Искористи ги првичните износи за пресметување на стапката на конверзија на евра во левови.

Пресметај колку евра добил, заокружени на најблискиот цел број.

13. На оглас на интернет еден компјутер се продава за 240£ или за 375$.

Девизниот курс е 1$ = £0,61.

Пресметај дали компјутерот е поевтин во долари или во фунти. Заокружи на две децимални места.

Можеш да претвориш во долари или во фунти.

14. Дејан планирал да оди на туристичко патување во Лондон.

Тој разменил во банка 76320 денари за фунти по девизен курс 1£ = 79,50 денари.

Една недела пред патувањето го прифатил предлогот на туристичката агенција, наместо во Лондон, да оди во Париз по многу поповолна цена.

Тој ги разменил сите фунти во евра по девизен курс 1£ = 1,19€.

а) Пресметај колку евра има сега тој. Заокружи на две децимални места.

б) Курсот за размена од денари во евра е 1€ = 61,69 денари.

Пресметај колку евра би имал Дејан ако ги претворел денарите директно во евра. Заокружи на две децимални места.

Прво размени денари во фунти. Потоа размени ги тие фунти во евра.

Примена на права пропорција во претворање на империјални мерни единици

Милји и километри

Врската меѓу милји и километри е:

8 километри = 5 милји

За да претвориме километри во милји, делиме со 8 и множиме со 5.

За да претвориме милји во километри, делиме со 5 и множиме со 8.

Пример 5

Автомобилот на Петар може да помине околу 70 милји пред да го потроши целото гориво. Петар го забележал знакот на автопатот.



Дали ќе успее да стигне до бензинската станица пред да му снема гориво?

Начин 1: Милјите ги претвораме во километри, така што делиме со 5, а потоа множиме со 8.

$70 : 5 = 14$

$14 \cdot 8 = 112$

Веројатно ќе остане без гориво по 112 километри.

Бидејќи бензинската пумпа е за 120 километри, веројатно нема да успее да стигне до бензинската пумпа.

Начин 2: Километрите ги претвораме во милји, така што делиме со 8, а потоа множиме со 5.

$120 : 8 = 15$

$15 \cdot 5 = 75$

Бензинската пумпа е оддалечена 75 милји.

Петар има бензин уште за 70 милји, па веројатно нема да успее да стигне до бензинската пумпа.

Други империјални мерни единици

Постојат империјални мерни единици за должина, маса и волумен, како и за многу други величини.

За сите мерни единици, освен за милји и километри, коефициентот на претворање ќе биде даден во задачата.

Пример 6

Филип има автомобил со резервоар што собира 9 галони гориво.

Колкав е волуменот на овој резервоар за гориво изразен во литри?

1 галон е околу 4,5 литри.

Значи, 1 галон = 4,5 литри

9 галони = $4,5 \cdot 9$ литри = 40,5 литри.

Неговиот резервоар за гориво собира околу 40,5 литри.

Пример 7

Мила знае дека нејзината гаража е долга 5,2 метри.

Таа ја видела оваа реклама за скала.



а) Пресметај ја должината на нејзината гаража во стапки.

б) Откриј дали таа може да ја стави скалата во гаражата.

1 стапка е околу 0,305 метри

а) 0,305 метри = 1 стапка

1 метар = $1 : 0,305 = 3,279$ стапки

$5,2$ метри = $3,279 \cdot 5,2 = 17,05$ стапки

Нејзината гаража е долга малку повеќе од 17 стапки.

Ова е унитарен метод за пропорционалност. Прво наоѓаме колку стапки има во 1 метар.

б) Скалата е долга 16 стапки.

Таа е пократка од 17 стапки.

Скалата ќе ја собере во нејзината гаража.

Задачи

1. Јован отишол на одмор.

Во текот на пет дена пешачел 21 милја, 18 милји, 17 милји, $15\frac{1}{2}$ милји и 13 милји.

а) Пресметај го вкупниот број милји што ги испешачил.

б) Претвори го растојанието во километри.

2. Матеј нашол стара завртка долга 6 инчи во својата визба.



Претвори ја должината на завртката во сантиметри.

1 инч е околу 2,54 сантиметри.

3. Еден резервоар за гориво собира 150 литри.

Колку галони е тоа?

1 галон е околу 4,5 литри.



4. Марија има петлитарски сад полн со сок од јаболка.

Треба да го претури во чаши, од кои секоја собира $\frac{1}{2}$ пинти.

Пресметај колку чаши можат да се наполнат со сокот од садот.

1 литар е околу 1,75 пинти.

5. Никола има телесна маса од 198 фунти.

Пресметај ја неговата маса во килограми.

1 килограм е околу 2,2 фунти.

6. Трката за олимписките маратон првично била долга 26 милји и 385 јарди.

Пресметај ја должината во километри.

Има 1760 јарди во една милја.

385 јарди се $\frac{385}{1760}$ милји.

Претвори ја дропката во децимален број пред да пресметаш колку километри се тоа.

7. Тодор има телесна маса од 93,6 килограми.

Никола има телесна маса од 15 камења и 5 фунти.

а) 1 килограм е приближно 2,2 фунти.

Користи го ова за да ја претвориш масата на Тодор во фунти.

Помножи со 2,2 за да претвориш килограми во фунти.

б) Има 14 фунти во 1 камен.

Користи го ова за да ја пресметаш масата на Никола во фунти.

в) Запиши кој од двајцата има поголема телесна маса и за колку. Решението заокружи го на најблиската фунта.

Задачи за повторување

1. Одреди ја вредноста на:

а) $\sqrt{361}$ **б)** $\sqrt{121}$ **в)** $\sqrt[3]{64}$ **г)** $\sqrt[3]{27}$

2. Процени ја вредноста на:

а) $\sqrt{28}$ **б)** $\sqrt[3]{40}$ **в)** $\sqrt{300}$ **г)** $\sqrt[3]{85}$

3. Пресметај ја вредноста на изразите:

а) $5+4\cdot 8$ **б)** $43-5\cdot 6+2$ **в)** $12\cdot(3+2)$

г) $100:5^2+7$ **д)** $3^3+(12-2\cdot 4)$ **ѓ)** $(-3)^2+2^2\cdot 5^2$

е) $12+2^3:4-3$ **ж)** $6^2+4\cdot(5+2^2)$

4. Употреби загради за да бидат точни следните равенства.

а) $3^2\cdot 4+1=45$ **б)** $144:8+2^2\cdot 2=24$ **в)** $3+2\cdot 5^2-9=80$

5. Елизабета платила сметка за бензин од 3200 денари и дополнително уште 6% данок.

Колку платила вкупно?

6. Маса се продава по цена, намалена за 12,5%.

Нејзината оригинална цена е 3600 денари.

Колкава е намалената цена на масата?

7. Димитар добил 300 денари камата на својата заштеда.

Тој имал заштеда од 4800 денари.

Колку изнесува каматната стапка во проценти?

8. Бројот на луѓе што биле во кино во 2012 година бил 25000.

Во 2013 година тој број се зголемил до 27000.

Колкав е процентот на зголемување?

9. Во табелата се прикажани резултатите на Мартин на неколку училишни тестови.

Предмет	Поени	Вкупно поени на тест
математика	25	40
историја	21	30
географија	48	60
биологија	52	80

По кој предмет Мартин постигнал најдобри резултати? Објасни како дојде до решението.

10. Цената на една тастатура е намалена за 40%.

Нејзината нова цена е 570 денари.

Колкава била цената пред намалувањето?

11. Билетите за воз се зголемиле за 25%.

Сега билетот за воз чини 360 денари.

Колкава била цената на билетот пред поскапувањето?

12. Упрости ги следните размери до нивната најпроста форма.

а) 12 : 21 **б)** 24 : 56 **в)** 72 : 27

г) 21 : 33 : 15 **д)** 48 : 28 : 36

13. Упрости ги следните размери до нивната најпроста форма.

а) 4 дена : 2 недели **б)** 1,5 kg : 500 g

в) 750 ml : 2 l **г)** 8 mm : 2 cm

14. Подели ги следниве величини во дадениот размер.

а) 320€ во сооднос 5 : 3 **б)** 160 cm во сооднос 7 : 1 **в)** 176$ во сооднос 8 : 3

15. Аглите во еден четириаголник се во сооднос 3 : 4 : 6 : 7

Пресметај ја големината на најголемиот агол.

16. Парче од дрво долго 2,4 m е поделено на два дела во сооднос 3 : 2.

Пресметај ја должината на двете нови парчиња.

Решението запиши го во сантиметри.

17. Во кутија има црвени и црни топчиња во сооднос 5 : 2.

Кој дел од топчињата се црвени? Запиши како дропка.

18. Во еден автобус $\frac{3}{4}$ од луѓето се мажи.

Пресметај го соодносот на мажи и жени.

19. Ана и Горан делат една награда во сооднос 5 : 2.

Ана примила 3690 денари повеќе од Горан.

Колкава била вкупната награда?

20. Упрости ги следниве размери и утврди дали се еквивалентни.

а) 28 : 35 и 36 : 45 **б)** 54 : 36 и 72 : 36 **в)** 63 : 27 и 28 : 12

21. **а)** Запиши ги следните размери во форма $n : 1$. Ако е неопходно, заокружи ги решенијата на едно децимално место.

i 12 : 8 **ii** 5 : 3 **iii** 5 : 4 **iv** 9 : 6 **v** 8 : 3

б) Кои два размери под **а)** се еквивалентни размери?

22. Бојан измешал 375 ml овошен сок со 3 l вода.

Ања измешала 600 ml овошен сок со 5 l вода.

а) Пресметај го процентот на овошен сок во секоја од смесите.

б) Во чија смеса има поголем процент на овошен сок?

23. На една екскурзија на планина заминале 51 ученик и 4 наставници.

На друга екскурзија на море заминале 87 ученици и 7 наставници.

а) Пресметај го размерот ученик наспрема наставник за првата екскурзија во форма $n : 1$.

б) Пресметај го размерот ученик наспрема наставник за втората екскурзија во форма $n : 1$.

в) Која екскурзија има поголем сооднос ученик наспрема наставник?

24. 8 метри од еден материјал чинат 392 денари.

Пресметај ја цената за 15 метри од материјал што се продава по иста цена.

25. Наташа и Мирјана на работното место се платени исто за работа од 1 час.

Наташа добила 532 денара за седумчасовна работа.

Пресметај колку ќе добие Мирјана за 5 часа работа.

26. x и y се две променливи.

Кога $x = 45$, $y = 12$

Кога $x = 30$, $y = 8$

Дали x и y се правопропорционални величини? Објасни го решението.

27. Девизниот курс меѓу американскиот долар ($) и британската фунта (£) е 1$ = 0,76£.

а) Претвори 300$ во фунти.

б) Претвори 275£ во долари. Решението заокружи го на две децимали.

28. Јане, Даме и Ненад патуваат од Скопје во Белград.

Тие разменале македонски денари во српски динари според ист девизен курс.

Јане разменил 5000 денари во 9750 динари.

а) Даме разменил 6000 денари во динари.

Пресметај колку динари добил Даме.

б) Ненад разменил одредена сума денари и за нив добил 7800 динари.

Колку денари разменил Ненад?

29. Растојанието од Скопје до Кичево е 118 km.

Растојанието од Скопје до Пехчево е 76,8 милји.

а) Претвори го растојанието од Скопје до Пехчево во километри. Решението заокружи го на најблискиот цел број.

б) Кој град е подалеку од Скопје, Пехчево или Кичево? За колку?

30. Индексот на телесната маса (BMI) е показател за соодносот на телесната маса и висината кај луѓето.

Формулата за индексот на телесната маса е:

$\text{BMI} = \frac{m}{h^2}$, каде што m е масата во килограми, а h е висината во метри.

а) Мерита е висока 1,48 m и има маса 50 kg.

Пресметај го нејзиниот индекс на телесна маса . Решението заокружи го на едно децимално место.

б) Марија е висока 6 стапки и има маса од 200 фунти.

I Претвори ја нејзината висина во метри (1 стапка = 30 сантиметри).

II Претвори ја нејзината маса во килограми (1 килограм = 2,2 фунти).

III Пресметај го нејзиниот индекс на телесна маса . Решението заокружи го до едно децимално место.

7 Алгебра и решавање проблеми

Наставни цели

- Заменува позитивни и негативни броеви во изрази и формули.
- Изразува променлива преку други променливи во дадено равенство; изведува едноставни формули; користи формули од математика и други предмети.
- Составува табела на вредности и црта график на линеарни функции, каде y е имплицитно дадена во однос на x; ја сведува равенката во форма $y = mx + c$; го знае значењето на m и го наоѓа наклонот кај праволиниски график.
- Прецизно идентификува, организира, претставува и толкува информации во писмена форма, табеларно, графички и со дијаграм.
- Составува функции што произлегуваат од секојдневни проблеми; ги црта и толкува нивните графици.
- Црта прецизни математички дијаграми и графици.
- Користи алгебарски методи за решавање проблеми поврзани со правопропорционалност, ги поврзува решенијата со графиците на равенките.
- Наоѓа приближни решенија на едноставен систем линеарни равенки преку наоѓање на пресечната точка на нивните графици.
- Решава едноставен систем од две линеарни равенки со две непознати со елиминирање на една непозната.
- Ја разгледува и ја оценува ефикасноста на различни стратегии и пристапи и ја подобрува постапката на решавање.
- Одредува производ од два линеарни израза од обликот $x \pm n$ и го упростува добиениот квадратен израз.
- Користи систематски методи на проба за да ги најде приближните решенија на равенки како што е $x^2 + 2x = 20$.
- Заокружува броеви до одреден број на децимални места; заокружувањето го користи за да дојде до решение на проблем со одреден степен на точност.
- Ги разбира и ги користи знаците за нееднаквост ($<$, $>$, $\leq$, $\geq$); составува и решава линеарни неравенки со една непозната; претставува решенија на бројна права.

7.1 Изведување формули и заменување броеви во формули

Енергија и маса

Позната формула што се користи во науката е $E = mc^2$.

Формулата покажува дека постои еквивалентност на енергијата E во маса m и со помош на константата c^2, каде што c е брзина на светлината.

Научникот Алберт Ајнштајн ја открил оваа врска на почетокот на XX век.

Во оваа тема ќе користиме различни формули што имаат примена во математиката и во науката.



Да се потсетиме како правиме **замена** на вредности во **формула** и како изведуваме формули.

Пример 1

$P = \frac{4h^2 + 5f}{2h}$

а) Пресметај ја вредноста на P, ако $f = 2$ и $h = -5$.

б) Пресметај ја вредноста на f, ако $P = 8$ и $h = 3$.

а) $P = \frac{4h^2 + 5f}{2h}$ Буквите ги заменуваме со дадените броеви.

$= \frac{4 \cdot (-5)^2 + 5 \cdot 2}{2 \cdot (-5)}$ $4 \cdot (-5)^2 = 4 \cdot (-5) \cdot (-5) = 4 \cdot 25 = 100$

$= \frac{100 + 10}{-10}$

$= \frac{110}{-10}$ Знаеме дека $+ : - = -$

$= -11$

б) $P = \frac{4h^2 + 5f}{2h}$ Буквите ги заменуваме со дадените броеви.

$8 = \frac{4 \cdot (3)^2 + 5f}{2 \cdot 3}$ $4 \cdot 3^2 = 4 \cdot 3 \cdot 3 = 4 \cdot 9 = 36$

$8 = \frac{36 + 5f}{6}$ Ја решаваме равенката.

$48 = 36 + 5f$ Двете страни ги множиме со 6.

$12 = 5f$ Одземаме 36 од двете страни.

$f = 2{,}4$ Двете страни ги делиме со 5.

Пример 2

Едно чоколадо има маса 23 грама, а едно колаче има маса 18 грама.

На масата има x чоколада и $(x-2)$ колачи.

Запиши формула за вкупната маса T, во грамови, на чоколадата и на колачите.

Масата на x чоколада $= 23x$

Масата на $(x-2)$ колачи $= 18(x-2)$

$T = 23x + 18(x-2)$ Се ослободуваме од заградите.

$T = 23x + 18x - 36$ Ги групираме сличните членови.

$T = 41x - 36$

Задачи

1. Пресметај ја вредноста на y во секоја од формулите, ако:

I $x = 10$ II $x = -5$ III $x = -10$

а) $y = 5x - 12$ **б)** $y = \frac{x}{5} + 7$ **в)** $y = \frac{5x-1}{2}$ **г)** $y = 50 - 4x$

д) $y = 2x - x^2$ **ѓ)** $y = 5x^2 - 1$ **е)** $y = x^2 + 5x + 4$ **ж)** $y = 3x^2 - 5x - 2$

2. Пресметај ја вредноста на p во секоја од формулите, ако:

I $a = 2, b = 5$ II $a = 7, b = -3$ III $a = -1, b = -4$

а) $p = 2ab$ **б)** $p = 5 - ab$ **в)** $p = a - 2b$ **г)** $p = 7a - 3b + 6$

д) $p = a^2 + 2b$ **ѓ)** $p = a(2b - 5)$ **е)** $p = a^2 + 2ab$ **ж)** $p = 3a^2 - 2ab - b^2$

3. Пресметај ја вредноста на T во секоја од формулите, ако:

I $a = 3, b = 2, c = 5$ II $a = -1, b = 4, c = 3$ III $a = -2, b = -3, c = -4$

а) $T = ab + c$ **б)** $T = 3a + 2b - 4c$ **в)** $T = (2a + b - c)^2$ **г)** $T = 2a^2 + 5b - c$

4. Пресметај ја вредноста на y во секоја од формулите, ако: I $x = 2$ II $x = -2$

а) $y = \frac{x-4}{4}$ **б)** $y = \frac{x+3}{x-1}$ **в)** $y = 8 - \frac{6}{x}$ **г)** $y = \frac{x^2+1}{1-x}$

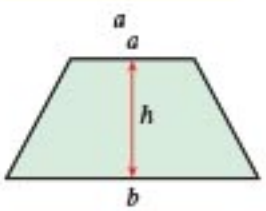
5. Формулата за периметарот L на правоаголникот е $L = 2a + 2b$



а) Пресметај ја вредноста на L, ако $a = 7{,}5$ и $b = 3{,}6$.

б) Пресметај ја вредноста на a, ако $L = 50$ и $b = 4{,}7$.

6. Формулата на плоштината P на трапезот е $P = \frac{1}{2}(a + b)h$



а) Пресметај ја вредноста на P, ако $a = 7$, $b = 6$ и $h = 8$.

б) Пресметај ја вредноста на h, ако $P = 40$, $a = 3$ и $b = 5$.

в) Пресметај ја вредноста на b, ако $P = 60$, $a = 4$ и $h = 12$.

7. $F = \frac{mv - mu}{t}$ е формула што се користи во физиката.

а) Пресметај ја вредноста на F, ако $m = 5$, $v = 8$, $u = 3$ и $t = 2$.

б) Пресметај ја вредноста на F, ако $m = 7$, $v = 10$, $u = -2$ и $t = 5$.

в) Пресметај ја вредноста на m, ако $F = 20$, $v = 9$, $u = 4$ и $t = 2$.

8. За еден концерт се продадени x билети, секој по 350 денари, и $(x + 18)$ билети, секој по 480 денари.

Запиши формула за вкупната цена на продадените билети.

9. Едно списание чини b денари, а еден весник чини $b - 3$ денари.

Запиши формула за сумата што треба да се плати за 4 списанија и 8 весници.

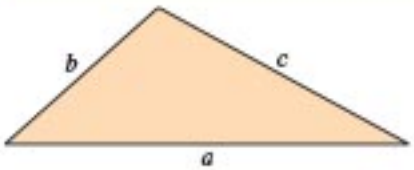
10. Елена купила x свеќи.

Една свеќа чини 30 денари. Таа платила со банкнота од 500 денари.

Запиши формула за кусурот K што го добила Елена.

11. Хероновата формула може да се користи за да се пресмета плоштината P на триаголник ако се познати должините на трите страни.

Можеш да дознаеш повеќе за Херон на интернет.



$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

каде што $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$

Со помош на оваа формула пресметај ја плоштината на триаголник со страни 5 cm, 7 cm и 10 cm.

12. На дијаграмот е прикажан торус.

Торусот е 3Д-форма што се формира кога помала кружница со радиус r ротира по должината на поголема кружница со радиус R.



Формулите за волуменот V и плоштината P на торусот се:

$$V = 2 \cdot \pi^2 \cdot R \cdot r^2 \quad \text{и} \quad P = 4 \cdot \pi^2 \cdot R \cdot r$$

а) Пресметај ги вредностите на V и P, ако $R = 7$ cm и $r = 4$ cm.

б) Одреди формула што ги поврзува V, P и r.

Замена во израз

Замена во израз е постапката со која на местото на буквите во изразот ги запишуваме дадените броеви.

Откако ќе замениме, треба да ја пресметаме вредноста на изразот, притоа внимаваме на редоследот на извршување на операциите.

1. Ги пресметуваме изразите во заградите.

2. Потоа ги пресметуваме степените.

3. Потоа делиме и множиме.

4. На крај пресметуваме собирање и одземање.

Загради
Степени
Делење и Множење
Собирање и Одземање

Пример 3

Ако $x = 3$ и $y = -4$, пресметај ја вредноста на:

а) $5x + 3y$ **б)** $x^2 + y^2$ **в)** $2x^2 + y$ **г)** $4xy + 3y^2$

а) $5x + 3y = (5 \cdot 3) + (3 \cdot (-4))$
$= 15 + (-12)$
$= 3$

б) $x^2 + y^2 = 3^2 + (-4)^2$
$= 9 + 16$
$= 25$

в) $2x^2 + y = 2 \cdot 3^2 + (-4)$
$= 18 - 4$
$= 14$

г) $4xy + 3y^2 = (4 \cdot 3 \cdot (-4)) + 3 \cdot (-4)^2$
$= -48 + 48$
$= 0$

Задачи

1. Ако $x = 7$, пресметај ја вредноста на изразите:

а) $5x - 3$ **б)** $x^2 + 1$ **в)** $8 - 2x$ **г)** $3x^2$

д) $2x^2 - 4$ **ѓ)** $\frac{x+3}{5}$ **е)** $\frac{2x+1}{5x-5}$ **ж)** $\frac{x^2+1}{x-4}$

з) x^3 **ѕ)** $(2x)^2 + 5x$ **и)** $2x + \frac{x}{14}$ **ј)** $x^2 - \frac{21}{x}$

2. Ако $x = 3$ и $y = 5$, пресметај ја вредноста на изразите:

а) $2x + 4y$ **б)** $5x - 3y$ **в)** $3xy$ **г)** $x^2 + y^2$

д) $2x^2y$ **ѓ)** $3xy^2 - 4x$ **е)** $\frac{x+y}{2}$ **ж)** $\frac{4xy}{5}$

з) $\frac{x^3}{y+4}$ **ѕ)** $(2xy)^2$ **и)** $(x - y)^2$ **ј)** $\left(\frac{3x}{2y}\right)^2$

3. Ако $a = 2$, $b = -3$ и $c = -4$, пресметај ја вредноста на изразите:

а) $2a + 3b$ **б)** abc **в)** $ab + c$ **г)** $a^2 + b^2 + c^2$

д) $2b^2 + a$ **ѓ)** $5ac$ **е)** $b^3 + 1$ **ж)** $5c^2 - b$

з) $(ab)^2 + c$ **ѕ)** $\frac{c}{a} + b$ **и)** $(a + b - c)^2$ **ј)** $\left(\frac{5ab}{c+2}\right)^2$

4. Одреди го x така што сите три изрази имаат еднаква вредност.

$x^2 + 13$ $2x^2 - 12$ $3x^2 + 4x - 17$

7.2 Изразување променлива

Во формулата $P = ax + b$, променливата P е **изразена** преку променливите a, x и b.

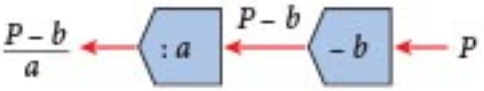
Ако сакаме да го изразиме x, од истата формула, треба да ја изведеме таа формула користејќи ја дадената формула. Тоа можеме да го направиме на следниве два начина.

Прв начин: Метод на инверзна функционална машина

Функционалната машина е:



Инверзната функционална машина е:



Според тоа, $x = \frac{P-b}{a}$

Втор начин: Еквивалентни трансформации

$P = ax + b$

$-b$ $\quad$ $-b$

$P - b = ax$

$:a$ $\quad$ $:a$

$\frac{P-b}{a} = x$

При изведувањето на формулите ги користиме истите правила што важат за решавање равенки.

Користиме инверзни операции.

Пример 1

Изрази го x од формулата $a(bx - c) = d$.

$a(bx - c) = d$ — Се ослободуваме од заградите.

$abx - ac = d$ — Додаваме ac на двете страни.

$abx = d + ac$ — Двете страни ги делиме со ab.

$x = \frac{d+ac}{ab}$

Задачи

1. Изрази го x од следниве формули.

а) $x + 2 = y$ **б)** $x + a = b$ **в)** $x - 5 = pq$ **г)** $x - p = 3q$

д) $t = x - 2u$ **ѓ)** $v^2 = x + y$ **е)** $a^2 + x = b$ **ж)** $x - a^2 = 2a$

з) $x - p = q + r$ **ѕ)** $b - c = x + a$ **и)** $ab + x = c$ **ј)** $r = x - pq$

2. Изрази го y од следниве формули.

а) $5y = a$ **б)** $ay = b$ **в)** $a\,y = 2e$ **г)** $3by = c$

д) $pq\,y = r$ **ѓ)** $ay = \pi r^2$ **е)** $3y = 2a + b$ **ж)** $cy = a - b$

з) $5y = 9x - 15$ **ѕ)** $xy = x + 2$ **и)** $xy = fg - 5$ **ј)** $7y = 5x - 1$

к) $y(a + b) = c$ **л)** $y(p - 3q) = 2r$ **љ)** $y(2p - q) = 5p + 2q$ **м)** $y(3 - a) = a^2 + b^2$

3. Изрази го x од следниве формули.

а) $2x + a = b$ **б)** $5x - q = r$ **в)** $y = 2x - 5$ **г)** $p = 3x + 2q$

д) $c = 7x + 4y$ **ѓ)** $y = mx + c$ **е)** $2x + y = z$ **ж)** $4x - y = 8$

з) $ax + b = c$ **ѕ)** $2ax - b = 10$ **и)** $3x - 4 = y$ **ј)** $a^2 + b^2x = c^2$

к) $abx + c = d$ **л)** $3fx - g^2 = h^2$ **љ)** $8x - 2f = 5g + h$ **м)** $ab + c = 5d + 2x$

4. Иво и Дарко сакале да го изразат x од формулата $w = 2(x + b)$

Иво напишал:

$$w = 2(x + b)$$
$$w = 2x + 2b$$
$$w - 2b = 2x$$
$$\frac{w - 2b}{2} = x$$

Дарко напишал:

$$w = 2(x + b)$$
$$\frac{w}{2} = x + b$$
$$\frac{w}{2} - b = x$$

Кој од нив двајца е во право? Објасни го одговорот.

5. Изрази го x од следниве формули.

а) $3(x + 2) = y$ **б)** $a(x + b) = c$ **в)** $a = 8(x - b)$ **г)** $3p = 5(x + 2q)$

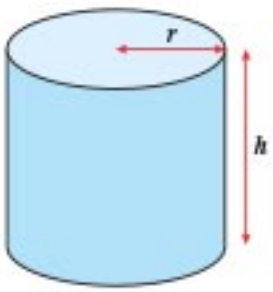
д) $2a = c(x - b)$ **ѓ)** $4g(h + x) = h$ **е)** $p = q(2 + x)$ **ж)** $a^2(x - b) = c^2$

з) $p(x + 5q) = 8$ **ѕ)** $ab(a + x) = c$ **и)** $a(2x + 3b) = c$ **ј)** $a^2(3 + 4x) = b$

6. $v = u + at$ е формула што се користи во физиката.

а) Изрази го u **б)** Изрази го a **в)** Изрази го t

7. Формулата за плоштината P на цилиндар е $P = 2\pi rh + 2\pi r^2$, каде што r е радиусот, а h е висината.



а) Пресметај ја плоштината ако $r = 5$ cm и $h = 8$ cm.

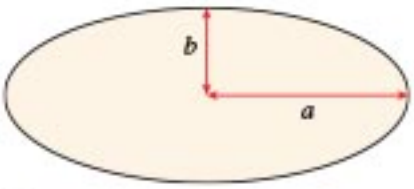
Запиши го решението без да ја пресметуваш вредноста на π.

б) Изрази го h од формулата.

в) Одреди ја вредноста на h ако $P = 600$ cm^2 и $r = 8$ cm.

Заокружи го решението на три значајни цифри.

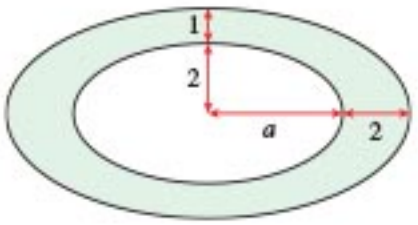
8.



На цртежот е прикажана елипса.

Формулата за наоѓање плоштина P на елипсата е $P = \pi ab$.

а) Покажи дека плоштината P на обоената област на вториот цртеж може да се пресмета со формулата $P = \pi a + 6\pi$.



б) Изрази го a од формулата $P = \pi a + 6\pi$.

в) Користи го резултатот под **б)** за да ја најдеш вредноста на a ако плоштината на обоениот дел е 30 cm².

Запиши го решението заокружено на 3 значајни цифри.

Формули со негативни коефициенти пред x

Формулата $a = b - 3x$ има негативен коефициент пред x.

Полесно е кога работиме со позитивни коефициенти пред x. Во овој случај треба да го префрлиме членот со x на другата страна на равенката за да стане позитивен.

Пример 2

Изрази го x од формулата $a = b - 3x$.

$a = b - 3x$ Додаваме $3x$ на двете страни.

$a + 3x = b$ Одземаме a од двете страни.

$3x = b - a$ Двете страни ги делиме со 3.

$x = \frac{b-a}{3}$

Задачи

1. Изрази го x од следниве формули.

а) $y = 2 - x$ **б)** $a = b - x$ **в)** $p = 2q - x$ **г)** $3pq - x = 7$

д) $a^2 - x = b^2$ **ѓ)** $p + q = r - x$ **е)** $2a - 3b = 5c - x$ **ж)** $a = b + c - x$

з) $2f = g - 2x$ ѕ) $f - gx = h$ и) $mn = 8 - 5x$ ј) $p^2 = 2a - 3x$

к) $a^2 + ab = b - cx$ л) $5b^2 - a^2x = c$ љ) $4y - 3x = 5z$ м) $m^2 - 2mnx = n^2$

2. Изрази го y од следниве формули.

а) $9 = 2(x - y)$ б) $d = 5(2 - y)$ в) $a = 3(b - y)$ г) $h(g - y) = a$

д) $a(b - y) = c$ ѓ) $h(h - y) = c$ е) $a^2 = b(c - y)$ ж) $p = q(r + t - y)$

з) $5(a^2 - y) = b$ ѕ) $8(pq - 2y) = r$ и) $7p = 2(q - 3y)$ ј) $2fg(3 - y) = 4h$

3. $Ft = mv - mu$ е формула што се користи во физиката.

а) Изрази го t б) Изрази го v в) Изрази го u

Формули со дропки

За да ги преуредиме формулите што вклучуваат дропки, треба да ги знаеме правилата за алгебарски дропки.

Пример 3

Изрази го x од формулата $\frac{x-a}{2} = y$

$\frac{x-a}{2} = y$ Двете страни ги множиме со 2.

$x - a = 2y$ Додаваме a на двете страни.

$x = 2y + a$

Пример 4

Изрази го x од формулата $\frac{b}{4} = \frac{5a}{x}$

$\frac{b}{4} = \frac{5a}{x}$ На секоја страна има по една дропка, па користиме накрсно множење.

$b \cdot x = 4 \cdot 5a$

$bx = 20a$

$x = \frac{20a}{b}$

Задачи

1. Изрази го x од следниве формули.

а) $\frac{x}{3} = y$ б) $\frac{x}{a} = p$ в) $\frac{x}{7} = ab$ г) $h = \frac{x}{g}$

д) $p^2 = \frac{x}{q}$ ѓ) $a + 2 = \frac{x}{c}$ е) $\frac{x}{4} = p + q$ ж) $\frac{x}{5} = 2a - b$

з) $\frac{x}{2+y} = 4$ ѕ) $\frac{x}{a-b} = c$ и) $\frac{x}{a^2+c^2} = b^2$ ј) $\frac{x}{2g+3h} = 5f$

2. Изрази го x од следниве формули.

а) $p=\frac{x+7}{3}$ **б)** $\frac{x-8}{5}=y$ **в)** $\frac{x-a}{b}=c$ **г)** $\frac{x-2m}{5}=n$

д) $a=\frac{5-x}{4}$ **ѓ)** $\frac{6-x}{a}=b$ **е)** $\frac{m-x}{2}=n$ **ж)** $ab=\frac{a-3x}{b}$

3. Изрази го x од следниве формули.

а) $\frac{3}{x}=y$ **б)** $\frac{a}{x}=t$ **в)** $\frac{2p}{x}=q$ **г)** $\frac{y}{x}=2$

д) $\frac{x}{4}=\frac{a}{b}$ **ѓ)** $\frac{x}{p}=\frac{q}{r}$ **е)** $\frac{5x}{a}=\frac{2b}{c}$ **ж)** $\frac{px}{q}=\frac{q}{p}$

з) $y=\frac{a+x}{x}$ **ѕ)** $a^2=\frac{b^2-c^2}{x^2}$ **и)** $2ab=\frac{c+d}{x}$ **ј)** $\frac{a+b}{x}=c+d$

4. Изрази го x од следниве формули.

а) $\frac{5}{x-3}=y$ **б)** $\frac{7}{x+2}=p$ **в)** $\frac{8}{3-x}=a$ **г)** $\frac{a}{x+b}=c$

д) $\frac{f}{g-x}=h$ **ѓ)** $\frac{a^2}{a-x}=5b$ **е)** $\frac{m}{8-3x}=2n$ **ж)** $\frac{ab}{c-bx}=c$

5. Изрази го x од следниве формули.

а) $\frac{1}{x}+2=y$ **б)** $\frac{1}{x}-a=b$ **в)** $\frac{1}{x}-pq=p$ **г)** $\frac{1}{x}-y^2=5y$

6. Изрази го x од следниве формули.

а) $\frac{1}{2}x+5=y$ **б)** $\frac{1}{3}x-a=b$ **в)** $y=\frac{1}{2}x+c$ **г)** $p=q-\frac{x}{4}$

д) $m=n-\frac{x}{5}$ **ѓ)** $y=2-\frac{x}{5}$ **е)** $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$ **ж)** $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=12$

7. Формулата за пресметување проста камата е $i=\frac{Kpt}{100}$

а) Изрази го p **б)** Изрази го K **в)** Изрази го t

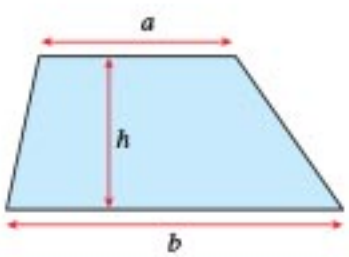
8. $s=\frac{1}{2}(u+v)t$ е формула што се користи во физиката.

а) Изрази го t **б)** Изрази го u **в)** Изрази го v

9. $v=\frac{s}{t}$ е формула што ги поврзува брзината, патот и времето.

а) Изрази го s **б)** Изрази го t

10. $P=\frac{1}{2}(a+b)h$ е формула за наоѓање плоштина P на трапез.



а) Изрази го h од формулата.

б) Пресметај го h ако $P=75$ cm², $a=8$ cm и $b=12$ cm.

в) Изрази го b од формулата.

г) Пресметај го b ако $P=58$ cm², $a=10$ cm и $h=8$ cm.

11. Формулата $F=\frac{9C}{5}+32$ се користи за претворање Целзиусови степени (°C) во Фаренхајтови степени (°F)

а) Покажи дека формулата може да се запише како $C=\frac{5(F-32)}{9}$

б) Користи ја формулата под **а)** за да ја одредиш вредноста на C кога $F=-31$.

в) Покажи дека кога C е еднаква на -40, тогаш и F е еднаква на -40.

Формули со степени, квадрати и квадратни корени

Важно е да запомниме дека:

ако $x^2 = 25$

тогаш $x = \pm\sqrt{25}$

$x = \pm 5$ Проверка: $5^2 = 25$ ✓ и $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$ ✓

Да го изразиме x од формулата $x^2 - b = a$

$x^2 - b = a$

+b +b

$x^2 = a + b$

√ √

$x = \pm\sqrt{a+b}$

Пример 5

Изрази го x од формулата $ax^2 - 5 = b$.

$ax^2 - 5 = b$ Додаваме 5 на двете страни.

$ax^2 = b + 5$ Ги делиме двете страни со a.

$x^2 = \frac{b+5}{a}$ Бараме квадратен корен на двете страни.

$x = \pm\sqrt{\frac{b+5}{a}}$

Запомни да го ставиш знакот ± пред квадратниот корен.

Пример 6

Изрази го x од формулата $\sqrt{2x-3} = y$.

$\sqrt{2x-3} = y$

$2x - 3 = y^2$ Квадрираме на двете страни.

$2x = y^2 + 3$ Додаваме 3 на двете страни.

$x = \frac{y^2+3}{2}$ Ги делиме двете страни со 2.

Пример 7

Формулата за плоштина на круг е $P = \pi r^2$.

Изрази го r од формулата.

$P = \pi r^2$ Ги делиме двете страни со π.

$\frac{P}{\pi} = r^2$ Бараме квадратен корен на двете страни.

$r = \sqrt{\frac{P}{\pi}}$

Бидејќи r е должина, тој мора да биде позитивен број, па не треба да го вклучуваме знакот ±.

Задачи

1. Изрази го x од следниве формули.

а) $x^2 = a$ **б)** $x^2 = pq$ **в)** $2x^2 = y$ **г)** $x^2 + 4 = m$

д) $x^2 - 5 = 4b$ **ѓ)** $x^2 + a = b$ **е)** $x^2 - 2f = g$ **ж)** $2x^2 + 3 = y$

з) $a\,x^2 + b = c$ **ѕ)** $px^2 + 3q = 5r$ **и)** $7 - x^2 = 2y$ **ј)** $8 - 3x^2 = 2a$

2. Изрази го x од следниве формули.

а) $\frac{x^2}{2} - 4 = y$ **б)** $\frac{x^2}{a} + b = c$ **в)** $5 - \frac{x^2}{4} = a$ **г)** $pq - \frac{x^2}{3} = r$

3. Изрази го x од следниве формули.

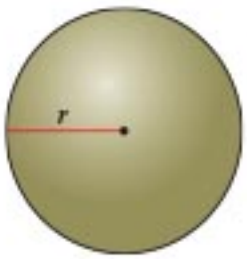
а) $\sqrt{x} = c$ **б)** $\sqrt{x} = 5p$ **в)** $\sqrt{x+2} = c$ **г)** $\sqrt{x+4} = 3a$

д) $\sqrt{x+a} = b$ **ѓ)** $\sqrt{x-f} = 5$ **е)** $\sqrt{x-2m} = 3n$ **ж)** $2\sqrt{x-4} = y$

з) $a\sqrt{x} = b$ **ѕ)** $\sqrt{ax} = b$ **и)** $\sqrt{\frac{x}{4}} = d$ **ј)** $n = \sqrt{\frac{x}{m}}$

к) $\sqrt{\frac{x+2}{5}} = q$ **л)** $\sqrt{\frac{a}{x}} = \frac{b}{c}$ **љ)** $\sqrt{\frac{2}{3x}} = y$ **м)** $\sqrt{\frac{1}{x-4}} = a$

4. Формулата за пресметување плоштина на топка е $P = 4\pi r^2$.

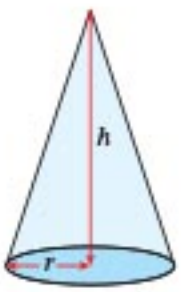


а) Изрази го r од формулата.

б) Користи го резултатот под **а)** за да ја најдеш вредноста на r кога $P = 20\ \text{cm}^2$.

Решението заокружи го на 3 значајни цифри.

5. Формулата за пресметување волумен на конус е $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$



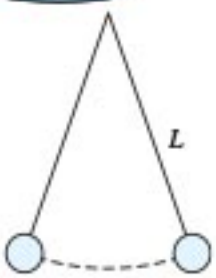
а) Изрази го r од формулата.

б) Пресметај ја вредноста на r кога $V = 50\ \text{cm}^3$ и $h = 12\ \text{cm}$.

Решението заокружи го на 3 значајни цифри.

6. $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{10}}$

Ова е формула што го пресметува времето T, во секунди, за една осцилација на нишало со должина L метри.



а) Препиши ја и дополни ја функционалната машина за наоѓање T.



б) Користи ја твојата функционална машина под **а)** за да ја најдеш вредноста на T кога $L = 0{,}2\ \text{m}$.

Решението заокружи го на 3 значајни цифри.

в) Прецртај ја и дополни ја инверзната функционална машина за да го изразиш T од формулата.



г) Користи го решението под **в)** за да ја најдеш вредноста на L кога $T = 1$ секунда.

Решението заокружи го на 3 значајни цифри.

7. $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ е многу позната формула за која ќе учиш во средно училиште.

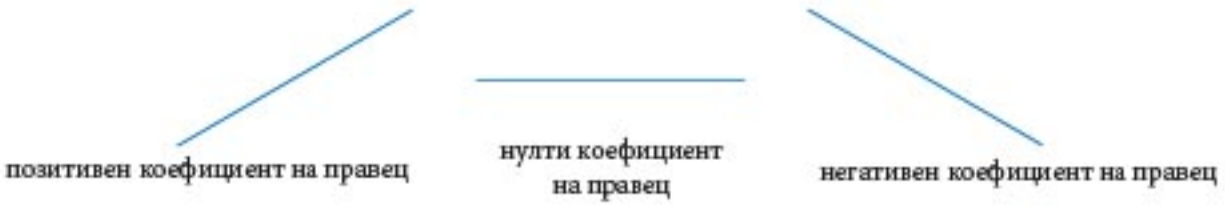
Покажи дека можеш да го изразиш c,
односно ќе ја добиеш следнава формула: $c = \frac{b^2 - (2ax + b)^2}{4a}$

Прикажи ги сите чекори во решавањето.

7.3 Коефициент на правец на график на функција

Со **коефициент на правец (наклон)** на правата одредуваме како е накосена таа права.

Правата може да има позитивен, негативен и нулти коефициент на правец.

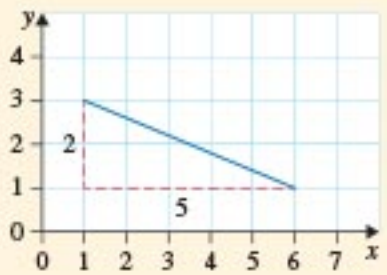


$$\text{коефициент на правец} = \frac{\text{вертикално растојание}}{\text{хоризонтално растојание}}$$



Пример

Одреди го коефициентот на правец на правата што минува низ точките (1, 3) и (6, 1).



Ја цртаме правата низ двете точки.

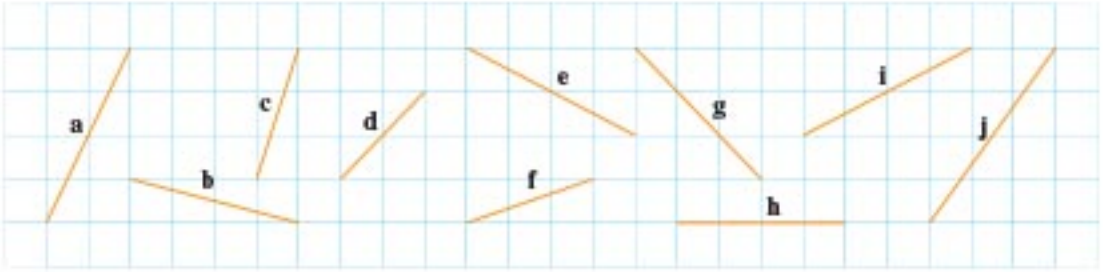
$$\text{коефициент на правец} = \frac{\text{вертикално растојание}}{\text{хоризонтално растојание}}$$

$$\text{коефициент на правец} = -\frac{2}{5}$$

Забележуваме дека коефициентот на правец е негативен.

Задачи

1. Одреди го коефициентот на правец на дадените прави.



2. Нацртај ги правите што ги поврзуваат следните парови точки.

Одреди го коефициентот на правец на секоја права.

а) (1, 2) и (3, 6)
б) (6, 3) и (3, 4)
в) (2, 1) и (4, 2)
г) (4, −2) и (6, 1)
д) (1, −3) и (6, −4)
ѓ) (−2, −6) и (2, −4)
е) (−3, 2) и (−2, −4)
ж) (−6, −6) и (−3, −3)

3. Правата што минува низ точките (1, 3) и (6, a) има коефициент на правец 2.

Одреди ја вредноста на a.

4. Правата што минува низ точките (2, 0) и (6, −6) има ист коефициент на правец како и правата што минува низ точките (−1, 2) и (7, b).

Одреди ја вредноста на b.

5. Наклон на правата AB е $\frac{4}{5}$.

Одреди го коефициентот на правец на правата што е нормална на AB.

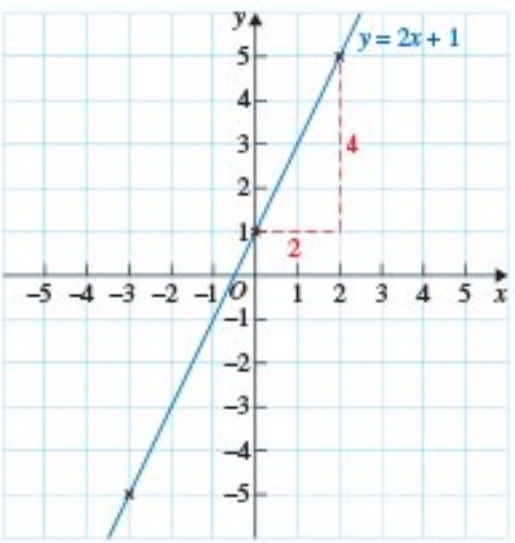
7.4 График на линеарна функција

Линеарна функција од вид $y = mx + c$

Во VII и во VIII одделение учевме како се цртаат графици на линеарни функции од вид $y = mx + c$.

На пример, за да го нацртаме графикот на $y = 2x + 1$, прво ја составуваме табелата на вредности, ги означуваме точките во координатниот систем и потоа ги поврзуваме со права.

x	−3	0	2
y	−5	1	5



Коефициентот на правецот на правата $y = 2x + 1$ можеме да го најдеме со кои било две точки од правата.

Ако ги земеме точките (0, 1) и (2, 5), добиваме:

$$\frac{\text{коефициент}}{\text{на правец}} = \frac{\text{вертикално растојание}}{\text{хоризонтално растојание}} = \frac{4}{2} = 2$$

Според тоа, коефициентот на правецот на правата $y = 2x + 1$ е 2.

Слично, можеме да покажеме дека коефициентот на правец на правата $y = 3x - 5$ е 3.

Оттука произлегува општото правило:

Графикот на $y = mx + c$ е права, каде што m = коефициент на правец на правата.

Пример 1

Одреди го коефициентот на правец на правите:

а) $y = 6x - 1$ **б)** $y = 5 - 3x$ **в)** $x + 2y - 6 = 0$

а) $y = 6x - 1$ Коефициент на правец = 6

б) $y = 5 - 3x$ Равенката ја запишуваме во вид $y = mx + c$

$y = -3x + 5$ Коефициент на правец = -3

в) $x + 2y - 6 = 0$ Равенката ја запишуваме во вид $y = mx + c$

$2y = -x + 6$

$y = -\frac{1}{2}x + 3$ Коефициент на правец = $-\frac{1}{2}$

Пример 2

Одреди ја равенката на правата со коефициент на правец 3 што минува низ точката (2, 5).

Коефициентот на правец е 3, па $m = 3$ го заменуваме во равенката $y = mx + c$.

$y = 3x + c$

Точката (2, 5) лежи на правата, па во равенката ги заменуваме $x = 2$ и $y = 5$.

$5 = 3 \cdot 2 + c$

$c = -1$

Равенката на правата е $y = 3x - 1$

Задачи

1. Нацртај ги правите и одреди ги нивните коефициенти на правец.

а) $y = x + 4$ **б)** $y = 3x - 1$ **в)** $y = \frac{1}{2}x + 3$ **г)** $y = 5 - 2x$

2. Запиши го коефициент на правец на дадените прави.

а) $y = 2x + 5$ **б)** $y = 3x + 7$ **в)** $y = x + 4$ **г)** $y = \frac{1}{2}x + 7$

д) $y = -2x + 3$ **ѓ)** $y = -\frac{1}{2}x + 1$ **е)** $y = 2x$ **ж)** $y = 6$

3. Јован вели дека коефициентот на правец на правата $y = 3 - 2x$ е 3.

Објасни зошто погрешил и одреди го точното решение.

4. Одреди го коефициентот на правец на правите.

а) $y = 1 - 3x$ **б)** $y = 5 - x$ **в)** $y = 4 + 2x$ **г)** $y = 5 - \frac{1}{2}x$

5. Запиши ја секоја од равенките во вид $y = mx + c$ и потоа одреди го коефициентот на правец на секоја права.

а) $y - 3x = 2$ **б)** $y - 2x + 1 = 0$ **в)** $4x + y = 3$ **г)** $5x + 2y = 10$

д) $3y - x = 9$ **ѓ)** $2y = 4x + 8$ **е)** $2y = 6x - 2$ **ж)** $3y - 5x = -15$

6. Кои од следниве прави се паралелни?

А $y = -2x + 2$ Б $4x + 2y = 6$ В $2y - 2x = 7$ Г $x = -\frac{1}{2}y + 5$

Паралелните прави имаат еднаков коефициент на правец.

7. Одреди ја равенката на правата со коефициент на правец -2 што минува низ точката $(1, 5)$.

8. Одреди ја равенката на правата што минува низ точките $(5, 4)$ и $(9, -1)$.

Линеарна функција од вид $ax + by = c$

Кога треба да нацртаме график на правата со равенка $3x + 4y = 12$, најлесно би било да ја нацртаме ако ги најдеме точките во кои правата ги сече координатните оски.

Ако ставиме $x = 0$ во равенката, ќе ја добиеме **пресечната точка со y-оската.**

Ако $x = 0$, тогаш $4y = 12$, $y = 3$.

Според тоа, графикот ја сече y-оската во 3.

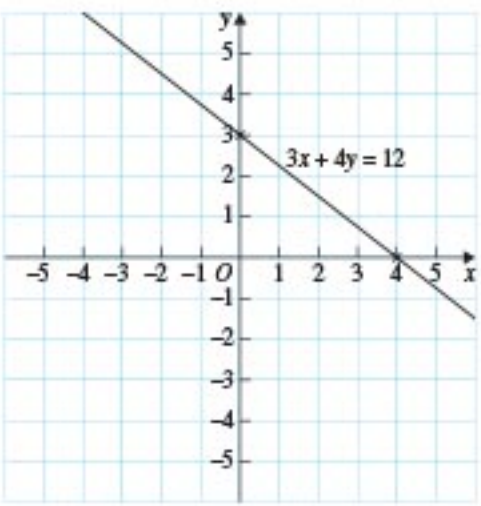
Ако ставиме $y = 0$ во равенката, ја добиваме **пресечната точка со x-оската.**

Ако $y = 0$, тогаш $3x = 12$, $x = 4$.

Според тоа, графикот ја сече x-оската во 4.

Табелата на вредности е:

x	0	4
y	3	0



Пример 3

Нацртај го графикот на $3x - 7y = 21$.

Ако $x = 0$, тогаш $-7y = 21$, $y = -3$ Ја наоѓаме пресечната точка со y-оската.

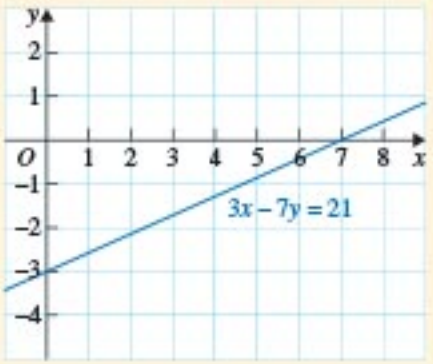
Според тоа, графикот ја сече y-оската во -3.

Ако $y = 0$, тогаш $3x = 21$, $x = 7$ Ја наоѓаме пресечната точка со x-оската.

Според тоа, графикот ја сече x-оската во 7.

Табелата на вредности е:

x	0	7
y	-3	0



Задачи

1. Одреди ги точките во кои графиците на функциите ги сечат координатните оски, а потоа нацртај ги правите.

   а) $x + y = 5$ **б)** $x + y = 2$ **в)** $x + y = -3$ **г)** $2x + y = 8$

   д) $x + 3y = 9$ **ѓ)** $4x + 3y = 12$ **е)** $2x + 3y = 12$ **ж)** $3x + 8y = 24$

   з) $2x + 4y = -8$ **ѕ)** $5x + 4y = -20$ **и)** $6x + 7y = 21$ **ј)** $2x + 7y = -21$

2. Одреди ги точките во кои графиците на функциите ги сечат координатните оски, а потоа нацртај ги правите.

   а) $x - y = 4$ **б)** $x - y = 2$ **в)** $2x - y = 4$ **г)** $x - 3y = 9$

   д) $3x - 4y = 24$ **ѓ)** $5x - 2y = 10$ **е)** $2x - 5y = -10$ **ж)** $7x - 2y = 21$

7.5 Функции што произлегуваат од ситуации во реалниот живот

Научниците користат графици за да прикажат трендови и тенденции меѓу два или повеќе параметри. Ако научниците можат потоа да најдат функција соодветна на трендот, тогаш можно е да се предвиди како ќе изгледа иднината.

Еден пример за тоа е препознавањето на ефектите од влијанието на климатските промени врз подигнувањето на морското ниво.



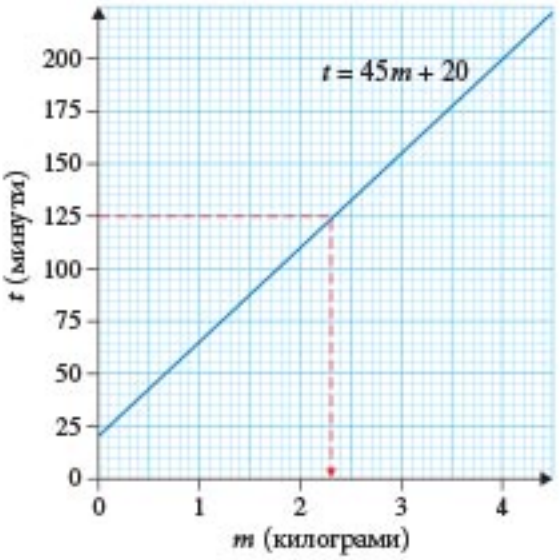
Правилото за пресметување на времето t за готвење, во минути, за пиле со маса m килограми е: „готвењето трае 45 минути за секој килограм и потоа уште дополнителни 20 минути".

Ова правило може да го запишеме со формула:

$t = 45m + 20$

За да ја прикажеме врската помеѓу m и t, составуваме табелата на вредности и го цртаме графикот.

m	1	2	3	4
t	65	110	155	200



Потоа графикот го користиме за да ги читаме потребните информации.

На пример, масата на пиле за кое се потребни 125 минути готвење е 2,3 kg (прикажано со црвените прави на графикот).

Пример

Петар бил во Охрид. Можел да изнајми брод од компанијата А или од компанијата Б.

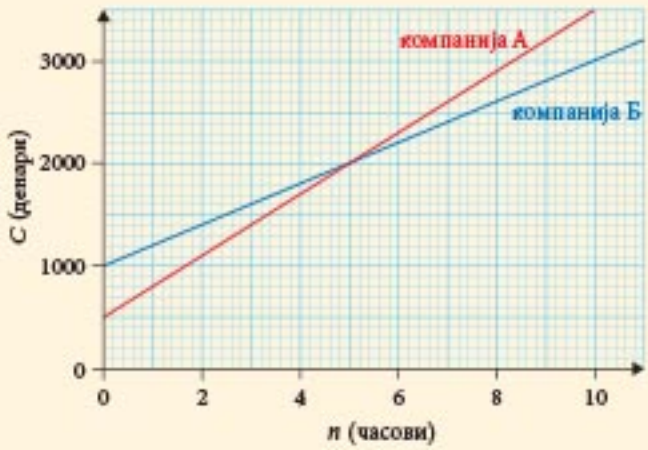
Цената (C) за изнајмување брод за n часови од секоја од компаниите е прикажана во табелата.

Компанија А	$C = 500 + 300n$
Компанија Б	$C = 1000 + 200n$

Прикажи ја графички цената на секоја од компаниите и одреди ги вредностите на n за кои компанијата А е поскапа од компанијата Б.

Компанија А				
n (часови)	1	2	3	4
C (денари)	800	1100	1400	1700

Компанија Б				
n (часови)	1	2	3	4
C (денари)	1200	1400	1600	1800



Од графикот можеме да видиме дека компанијата А е поскапа кога $n > 5$.

Задачи

1. Али загрева еден сад со вода.

Ја запишувал температурата на секои 5 минути.

Во табелата се прикажани неговите резултати.

Време, m (минути)	5	10	15	20
Температура, t (°C)	10	13	16	19

а) Нацртај график на права за да ги прикажеш податоците од табелата.

б) Колкава била температурата на водата кога почнал да ја загрева водата?

в) Одреди го коефициентот на правец.

Кој податок го претставува коефициентот на правец?

г) Користи го графикот за да ја најдеш вредноста на m кога температурата била 17 °C.

2. Правилото за претворање на температурата C во Целзиусови степени (°C) во температура F, во Фаренхајтови степени (°F) е:

„помножи со 1,8 и потоа додај 32"

а) Запиши го ова правило во видот „$F =$ ....."

б) Претстави го ова правило на график за $-50 \leq C \leq 50$.

в) Користи го графикот за да ја најдеш температурата:

I во °F кога таа е 18 °C **II** во °C кога таа е 18°F

г) Користи го графикот за да ја најдеш температурата која има иста вредност во Целзиусови степени и во Фаренхајтови степени.

7.6 Права пропорција

Ако цената на еден метар ластик е 6 денари, тогаш цената (C) на n метри ластик е дадена со формулата: $C = 6n$.



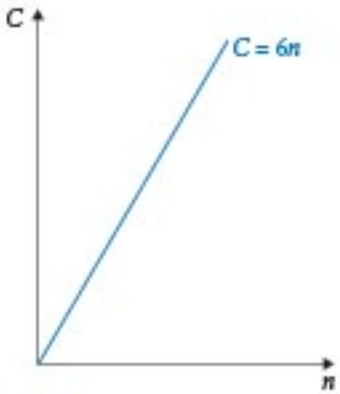
Во табелата се прикажани неколку можни вредности на n и на C.

n (метри)	1	2	3	4	5	6
C (денари)	6	12	18	24	30	36

Тоа значи дека:

ако n се зголеми двојно, тогаш исто така и C ќе се зголеми двојно

ако n се зголеми трипати, тогаш исто така и C ќе се зголеми трипати.



Количествата n и C велиме дека се правопропорционални, а графикот на C во однос на n ќе биде права која минува низ координатниот почеток.

Ако y е правопропорционален на x, тогаш $y = kx$, каде што k е коефициент на пропорционалност.

Пример

y е правопропорционален на x.

Кога $y = 4$, тогаш $x = 5$.

а) Одреди формула што ги поврзува y и x.

б) Одреди го y, кога $x = 3$.

а) y е правопропорционален на x. Имаме

$y = kx$

$4 = 5k$ $y = 4$ и $x = 5$ ги заменуваме во равенката.

$k = \frac{4}{5}$ Двете страни ги делиме со 5.

Формулата е $y = \frac{4}{5}x$

б) Кога $x = 3$, $y = \frac{4}{5} \cdot 3 = 2{,}4$ $x = 3$ го заменуваме во формулата под **а)**.

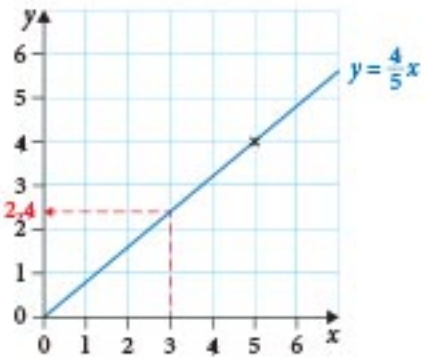
Примерот можеме да го илустрираме со график.

Бидејќи y е правопропорционален со x, графикот ќе биде права што минува низ координатниот почеток и точката (5, 4).

Правата има коефициент на правец $\frac{4}{5}$,

а равенката на права е $y = \frac{4}{5}x$

Испрекинатата црвена линија покажува дека кога $x = 3$, тогаш $y = 2{,}4$.



Задачи

1. y е правопропорционален на x.

$y = 18$ кога $x = 6$

а) Одреди формула што ги поврзува y и x.

б) Одреди ја вредноста на y кога $x = 12$.

2. y е правопропорционален на x.

$y = 15$ кога $x = 20$

а) Одреди формула што ги поврзува y и x.

б) Одреди ја вредноста на y кога $x = 34$.

3. p е правопропорционален на q.

$p = 0{,}5$ кога $q = 8$

а) Одреди формула што ги поврзува p и q.

б) Одреди ја вредноста на p кога $q = 20$.

в) Одреди ја вредноста на q кога $p = 0{,}2$.

4. Изминатиот пат d, во метри, од еден велосипедист е правопропорционален на бројот на завртувања n, направени од тркалото на велосипедот.

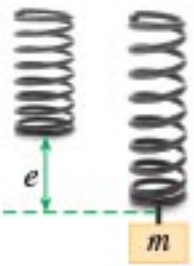


Јован поминал 21 m со 10 завртувања на велосипедското тркало.

а) Одреди формула што ги поврзува d и n.

б) Одреди го изминатиот пат кога $n = 27$.

5. Истегнувањето (e) на пружината, во cm, е правопропорционално на масата m, во kg, на телото што го закачуваме на едниот крај на пружината.



Кога $e = 3$, $m = 5$

а) Одреди формула што ги поврзува e и m.

б) Одреди го e, кога $m = 6$.

в) Одреди го m, кога $e = 2{,}6$.

6. Времето t, во секунди, потребно за една осцилација на нишало е правопропорционално со квадратниот корен на должината l, во метри, на нишалото.



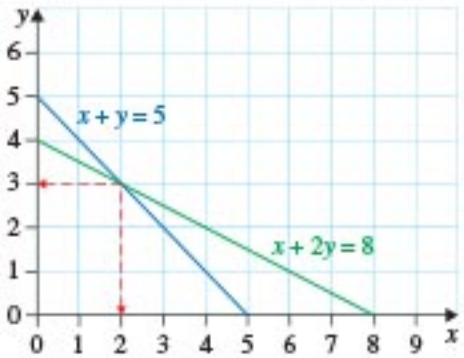
$t = 1{,}6$ кога $l = 0{,}64$

а) Одреди формула што ги поврзува t и l.

б) Одреди го t, кога $l = 0{,}81$.

7.7 Графичко решавање систем равенки

Равенките $x + y = 5$ и $x + 2y = 8$ можеме да ги претставиме графички на координатен систем, како што е прикажано на цртежот.



Правите се сечат во точката (2, 3).

Решението на **системот равенки**:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

е $x = 2$, $y = 3$

Проверка: вредностите на x и y ги заменуваме во почетните равенки.

$2 + 3 = 5$ ✓ и $2 + (2 \cdot 3) = 8$ ✓

Систем равенки е формиран од две или повеќе равенки за кои бараме заеднички решенија. Равенките ги запишуваме едно под друго и ги означуваме со заграда {.

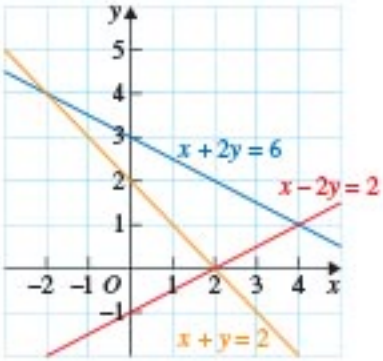
Задачи

1. Реши ги графички следните системи равенки:

а) $\begin{cases} x+2y=6 \\ x-2y=2 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+y=2 \\ x-2y=2 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y=2 \\ x+2y=6 \end{cases}$



2. Реши го графички системот равенки.

$$\begin{cases} 5x+2y=25 \\ 4x-2y=2 \end{cases}$$

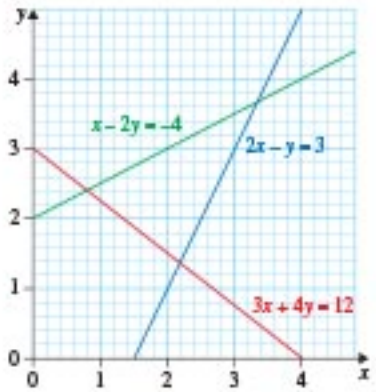
3. Реши ги графички следниве системи равенки:

а) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x-2y=-4 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x-2y=-4 \\ 3x+4y=12 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x+4y=12 \\ 2x-y=3 \end{cases}$

Решенијата заокружи ги на едно децимално место.



4. Реши го графички системот равенки.

$$\begin{cases} 3x+7y=21 \\ 2x-3y=-3 \end{cases}$$

Решенијата заокружи ги на едно децимално место.

7.8 Решавање систем равенки со метод на елиминација

Равенката $2x + y = 6$ има две променливи x и y.

Постојат многу парови вредности на x и y за кои е точна равенката $2x + y = 6$.

Такви се, на пример: $x = 1, y = 4$ $x = 2, y = 2$ $x = 4, y = -2$

Равенката $4x + y = 8$ исто така има две променливи x и y.

Повторно, постојат многу парови вредности на x и y за кои е точно равенката $4x + y = 8$.

Некои можни решенија се: $x = 0, y = 8$ $x = 1, y = 4$ $x = 2, y = 0$

Кога решаваме **систем од равенки**, треба да го најдеме парот вредности на x и y за кои двете равенки во системот преминуваат во точни равенства.

Решение на системот равенки:

$$\begin{cases} 4x + y = 8 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$$

е $x = 1$, $y = 4$ бидејќи за овој пар вредности се точни и двете равенки.

Побрз начин на решавање систем равенки е да користиме алгебарски метод за решавање систем равенки:

$$\begin{cases} 4x + y = 8 & [1] \\ 2x + y = 6 & [2] \end{cases}$$

Овој метод, со кој ја елиминираме едната променлива, го нарекуваме метод на елиминација.

Разликата Равенка [1] – Равенка [2] ќе ги елиминира членовите со y.

$$2x = 2$$
$$x = 1$$

За да ја најдеме вредноста на y, го заменуваме $x = 1$ во равенката [1].

$$4 + y = 8$$
$$y = 4$$

Решението на системот е $x = 1$, $y = 4$.

Направи проверка на решението со заменување на вредностите на x и y во почетните равенки.

Пример 1

Реши го системот равенки: $\begin{cases} 5x + 2y = 11 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 5x + 2y = 11 & [1] \\ x + 2y = -1 & [2] \end{cases}$$

Разликата Равенка [1] – Равенка [2] ќе ги елиминира членовите со y.

$$4x = 12$$
$$x = 3$$

За да ја најдеме вредност на y, го заменуваме $x = 3$ во равенката [1]:

$$15 + 2y = 11$$
$$2y = -4$$
$$y = -2$$

Решението на системот е $x = 3, y = -2$

Проверка: $(5 \cdot 3) + (2 \cdot (-2)) = 15 + (-4) = 11$ ✓ и $3 + (2 \cdot (-2)) = 3 + (-4) = -1$ ✓

Пример 2

Реши го системот равенки: $\begin{cases} 4x + 3y = 29 \\ 2x - 3y = -17 \end{cases}$

$$\begin{cases} 4x + 3y = 29 & [1] \\ 2x - 3y = -17 & [2] \end{cases}$$

Збирот Равенка [1] + Равенка [2] ќе ги елиминира членовите со y.

$$6x = 12$$
$$x = 2$$

За да ја најдеме вредноста на y, го заменуваме $x = 2$ во равенката [1].

$$8 + 3y = 29$$
$$3y = 21$$
$$y = 7$$

Решението на системот е $x = 2, y = 7$.

Проверка: $(4 \cdot 2) + (3 \cdot 7) = 8 + 21 = 29$ ✓ и $(2 \cdot 2) - (3 \cdot 7) = 4 - 21 = -17$ ✓

Задачи

1. Реши ги системите равенки.

а) $\begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ x + 3y = 14 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 5x + y = 17 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 4x + y = 9 \\ 3x + y = 8 \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} 5x + 2y = 14 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$

д) $\begin{cases} 7x + 5y = 26 \\ 3x + 5y = 14 \end{cases}$ **ѓ)** $\begin{cases} x + 7y = 18 \\ x + 4y = 12 \end{cases}$ **е)** $\begin{cases} 3x + 4y = 26 \\ x + 4y = 14 \end{cases}$ **ж)** $\begin{cases} 3x + 5y = 21 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

з) $\begin{cases} 4x + 3y = 31 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$ **ѕ)** $\begin{cases} x - 4y = 12 \\ x - 7y = 6 \end{cases}$ **и)** $\begin{cases} 7x + 3y = -5 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$ **ј)** $\begin{cases} x + 2y = -2 \\ x - 5y = 19 \end{cases}$

2. Реши ги системите равенки.

а) $\begin{cases} 3x + y = 19 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 3x + 2y = 22 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} x + 3y = 13 \\ 2x - 3y = -10 \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} 5x - 3y = -21 \\ 3x + 3y = -3 \end{cases}$

д) $\begin{cases} 5x + 2y = 23 \\ 3x - 2y = 17 \end{cases}$ **ѓ)** $\begin{cases} 6x - y = -16 \\ 5x + y = -6 \end{cases}$ **е)** $\begin{cases} 7x - 3y = 59 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$ **ж)** $\begin{cases} 8x - 5y = -14 \\ 2x + 5y = -16 \end{cases}$

3. Реши ги системите равенки.

а) $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 6x + y = -8 \\ 4x + y = -4 \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ 5x - 7y = -26 \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} 3x - 5y = -11 \\ 4x + 5y = -3 \end{cases}$

д) $\begin{cases} 5x - 4y = -3 \\ 3x - 4y = -13 \end{cases}$ **ѓ)** $\begin{cases} 4x - y = 14 \\ 6x + y = 16 \end{cases}$ **е)** $\begin{cases} 4x - 5y = 37 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$ **ж)** $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 3x + 2y = -4 \end{cases}$

з) $\begin{cases} 2x + 7y = 16 \\ 2x - 3y = -24 \end{cases}$ **ѕ)** $\begin{cases} 4x - 3y = 21 \\ 3x - 3y = 18 \end{cases}$ **и)** $\begin{cases} 4x - 7y = -58 \\ 3x + 7y = 30 \end{cases}$ **ј)** $\begin{cases} 7x - 3y = -4 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$

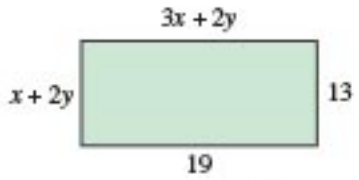
4. Збирот на два броја е 22, а нивната разлика е 9.

Да ги означиме двата броја со x и y.

а) Запиши ги двете равенки по x и y.

б) Реши го системот од двете равенки.

5. На цртежот е даден правоаголник. Пресметај ги вредностите на x и y, според податоците на цртежот.



6. Аритметичка средина на два броја е 44, нивната разлика е 17.

Кои се тие броеви?

Постојат системи равенки во кои **броевите пред една од променливите не се еднакви**. Во тој случај, треба едната или двете равенки во системот да ги помножиме со соодветен број.

За таа цел одредуваме НЗС за броевите пред едната променлива. Потоа, ги множиме равенките со соодветниот број и на крајот ги собираме или ги одземаме равенките.

Пример 3

Реши го системот равенки: $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 3x - 4y = 28 \end{cases}$

$$\begin{cases} x + 2y = 6 & [1] \\ 3x - 4y = 28 & [2] \end{cases}$$

За да ги направиме исти коефициентите пред x, равенката [1] ја множиме со 3.

$$\begin{cases} 3x + 6y = 18 \\ 3x - 4y = 28 \end{cases}$$

Одземањето на двете равенки ќе ги елиминира членовите со x.

$10y = -10$ Знаеме дека $+6 - (-4) = 6 + 4$

$y = -1$

За да ја најдеме вредноста на x, треба да го замениме $y = -1$ во равенката [1].

$x - 2 = 6$

$x = 8$

Решението на системот е $x = 8, y = -1$.

Проверка: $8 + (2 \cdot (-1)) = 8 + (-2) = 6$ ✓ и $(3 \cdot 8) - (4 \cdot (-1)) = 24 - (-4) = 28$ ✓

Пример 4

Реши го системот равенки: $\begin{cases} 5x + 3y = 26 \\ 8x + 5y = 43 \end{cases}$

$$\begin{cases} 5x + 3y = 26 & [1] \\ 8x + 5y = 43 & [2] \end{cases}$$

За да ја елиминираме променливата y, наоѓаме НЗС (3,5) = 15, па така равенката [1] ќе ја помножиме со 5, а равенката [2] со 3.

$$\begin{cases} 25x + 15y = 130 \\ 24x + 15y = 129 \end{cases}$$

Одземањето на двете равенки ќе ги елиминира членовите со y.

$$x = 1$$

За да ја најдеме вредноста на y, го заменуваме $x = 1$ во равенката [1].

$$5 + 3y = 26$$
$$3y = 21$$
$$y = 7$$

Решението е $x = 1, y = 7$.

Проверка: $(5 \cdot 1) + (3 \cdot 7) = 5 + 21 = 26$ ✓ и $(8 \cdot 1) + (5 \cdot 7) = 8 + 35 = 43$ ✓

Задачи

1. Реши ги системите равенки.

а) $\begin{cases} 2x + y = 11 \\ 5x + 3y = 30 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 8x - 3y = 26 \\ 3x + y = 14 \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 5x + 3y = 43 \\ 4x + 6y = 38 \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} 3x + 2y = 27 \\ 4x - y = 25 \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ x - 3y = -13 \end{cases}$ **ѓ)** $\begin{cases} 4x + y = 11 \\ 5x + 2y = 13 \end{cases}$ **е)** $\begin{cases} 4x - 5y = 31 \\ x - 3y = 13 \end{cases}$ **ж)** $\begin{cases} 5x - y = -16 \\ 7x + 4y = 10 \end{cases}$

з) $\begin{cases} 7x + 2y = 13 \\ 3x + 4y = 15 \end{cases}$ **ѕ)** $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - 4y = 23 \end{cases}$ **и)** $\begin{cases} 4x + 3y = 13 \\ x + 5y = -1 \end{cases}$ **ј)** $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + 5y = -8 \end{cases}$

2. Реши ги системите равенки.

а) $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 5x + 2y = 38 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 3x + 2y = 19 \\ 2x - 3y = -22 \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 5x + 3y = 32 \\ 2x + 4y = 24 \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} 4x + 3y = -2 \\ 3x + 5y = 4 \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x - 2y = 24 \\ 5x - 7y = 51 \end{cases}$ **ѓ)** $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 5x - 2y = 27 \end{cases}$ **е)** $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 5x + 2y = -4 \end{cases}$ **ж)** $\begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 9x - 4y = -17 \end{cases}$

з) $\begin{cases} 5x - 7y = 38 \\ 3x - 4y = 23 \end{cases}$ **ѕ)** $\begin{cases} 2x + 2y = 10 \\ 5x + 3y = 17 \end{cases}$ **и)** $\begin{cases} 5x - 2y = 33 \\ 3x + 7y = -13 \end{cases}$ **ј)** $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x - 2y = 41 \end{cases}$

3. Ако еден број го помножиме со 3 и потоа го собереме со друг број помножен со 5, добиваме резултат 2.

Збирот на двата броја е 2.

Одреди ги броевите.

4. Седум лименки сок од јаболко и пет лименки лимонада чинат 170 денари.
Четири лименки сок од јаболко и три лименки лимонада чинат 99 денари.
Одреди ја цената на една лименка сок од јаболко.

5. Театарските билети чинат 275 денари за возрасни и 160 денари за деца.
Една вечер театарот продал 342 билета за 75995 денари.
Колку билети за деца продал театарот?

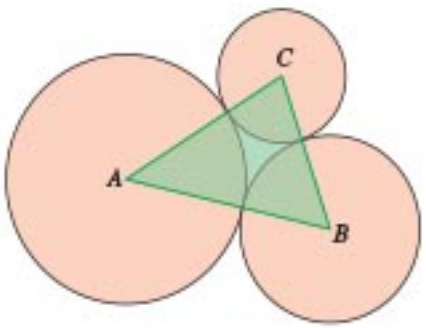
6. Реши ги системите равенки.

а) $\begin{cases} 3x+2y=11 \\ y-2x=3 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} y=x+3 \\ 3y+x=5 \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 3y-5x=21 \\ 3x+y+7=0 \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{5}=9 \\ \frac{x}{4}-\frac{y}{3}=-2 \end{cases}$

7. Најди ги x и y така што дадените изрази да имаат исти вредности.

$2x+y+5$ $5x-2y+17$ $4x+3y-63$

8. A, B и C се центри на три кружници.
$\overline{AB}=11$, $\overline{AC}=10$ и $\overline{BC}=8$
Пресметај ги радиусите на трите кружници.



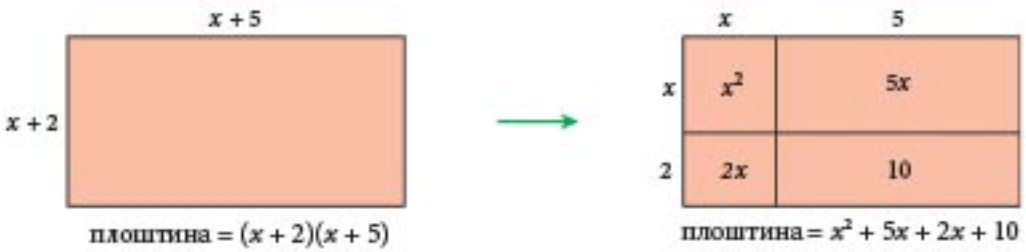
9. Реши го системот равенки.

$$\begin{cases} 2x+y+z=11 \\ 2x-y+z=-1 \\ x+2y+2z=13 \end{cases}$$

7.9 Множење два алгебарски израза

Записот $(x+2)(x+5)$ значи $(x+2)\cdot(x+5)$. За да ги помножиме изразите треба да се ослободиме од заградите во двата израза.

Плоштината на правоаголник со страни со должини $x+2$ и $x+5$ можеме да ја пресметаме со поделба на правоаголникот на четири дела како што е прикажано на цртежот.



Според тоа, имаме $(x+2)(x+5)=x^2+5x+2x+10$

$$=x^2+7x+10$$

Сега ќе се ослободиме од заградите $(x+2)(x+5)$ без користење цртеж.

Треба да ги следиме следните чекори:

Чекор 1:

Го множиме секој член од втората заграда со x од првата заграда.

$(x+2)(x+5)$ $\quad x \cdot x = x^2$ и $x \cdot 5 = 5x$

Чекор 2:

Го множиме секој член од втората заграда со $(+2)$ од првата заграда.

$(x+2)(x+5)$ $\quad 2 \cdot x = 2x$ и $2 \cdot 5 = 10$

Чекор 3:

Ги комбинираме резултатите од претходните два чекора.

Добиваме $(x+2)(x+5)$ $\quad = x^2 + 5x + 2x + 10$

$= x^2 + 7x + 10$

Пример 1

Користи цртеж за да се ослободиш од заградите во изразот: $(x+6)(x+11)$

	x	11
x	x^2	$11x$
6	$6x$	66

$(x+6)(x+11) = x^2 + 11x + 6x + 66$

$= x^2 + 17x + 66$

Пример 2

Помножи ги изразите, а потоа упрости го добиениот израз:

а) $(x+3)(x+4)$ **б)** $(x-7)(x+2)$ **в)** $(x-6)(x-7)$

а) $(x+3)(x+4)$ $\quad x \cdot x = x^2$ $\quad x \cdot (+4) = +4x$ $\quad 3 \cdot (+x) = 3x$ $\quad +3 \cdot (+4) = +12$

$= x^2 + 4x + 3x + 12$

$= x^2 + 7x + 12$

б) $(x-7)(x+2)$ $\quad x \cdot x = x^2$ $\quad x \cdot (+2) = +2x$ $\quad -7 \cdot (+x) = -7x$ $\quad -7 \cdot (+2) = -14$

$= x^2 + 2x - 7x - 14$

$= x^2 - 5x - 14$

в) $(x-6)(x-7)$ $\quad x \cdot x = x^2$ $\quad x \cdot (-7) = -7x$ $\quad -6 \cdot x = -6x$ $\quad -6 \cdot (-7) = +42$

$= x^2 - 7x - 6x + 42$ Множење два негативни броја: $-6 \cdot (-7) = +42$

$= x^2 - 13x + 42$

Задачи

1. Со помош на цртеж помножи ги изразите:

а) $(x+1)(x+3)$ **б)** $(x+8)(x+2)$ **в)** $(x+5)(x+5)$ **г)** $(x+6)(x+4)$

д) $(x+8)(x+1)$ **ѓ)** $(x+7)(x+9)$ **е)** $(x+4)(x+8)$ **ж)** $(x+2)(x+10)$

2. Ослободи се од заградите без користење цртеж.

а) $(x+2)(x+4)$ **б)** $(x+5)(x+1)$ **в)** $(x+4)(x+4)$ **г)** $(x+7)(x+3)$

д) $(x+9)(x+8)$ **ѓ)** $(x+6)(x+2)$ **е)** $(x+7)(x+8)$ **ж)** $(x+11)(x+4)$

3. Ослободи се од заградата и упрости:

а) $(x+3)^2$ **б)** $(x+1)^2$ **в)** $(x+7)^2$

г) $(x+2)^2$ **д)** $(x+9)^2$ **ѓ)** $(x+5)^2$

$(x+3)^2 = (x+3)(x+3)$

4. Поправи ги грешките што ги направила Ања кога се ослободувала од заградите во домашната работа.

а) $(x+3)(x-6) = x^2 - 6x + 3x - 3 = x^2 - 3x - 3$

б) $(x-4)(x-5) = x^2 - 5x - 4x - 20 = x^2 - 9x - 20$

в) $(x-6)^2 = x^2 + 36$

Во задачите **5**, **6**, **7** и **8** ослободи се од заградите и упрости.

5. **а)** $(x-3)(x+4)$ **б)** $(x+5)(x-7)$ **в)** $(x-6)(x+8)$ **г)** $(x+2)(x-9)$

д) $(x+3)(x-7)$ **ѓ)** $(x-6)(x+7)$ **е)** $(x+9)(x-1)$ **ж)** $(x+4)(x-5)$

з) $(x+4)(x-2)$ **ѕ)** $(x-9)(x+8)$ **и)** $(x+10)(x-2)$ **ј)** $(x+5)(x-7)$

6. **а)** $(x-3)(x+3)$ **б)** $(x+5)(x-5)$ **в)** $(x-6)(x+6)$ **г)** $(x+2)(x-2)$

д) $(x+4)(x-4)$ **ѓ)** $(x-1)(x+1)$ **е)** $(x+15)(x-15)$ **ж)** $(x+9)(x-9)$

7. **а)** $(x-5)(x-4)$ **б)** $(x-8)(x-7)$ **в)** $(x-6)(x-8)$ **г)** $(x-2)(x-3)$

д) $(x-3)(x-7)$ **ѓ)** $(x-6)(x-9)$ **е)** $(x-11)(x-2)$ **ж)** $(x-8)(x-10)$

8. **а)** $(x-1)^2$ **б)** $(x-7)^2$ **в)** $(x-4)^2$ **г)** $(x-13)^2$

9.

A	B	C	D	E
$x-3$	$x+1$	$x+3$	$x+2$	$x-1$

Кои две картички се помножени за да се добијат следниве изрази.

а) $x^2 - x - 6$ **б)** $x^2 + 4x + 3$ **в)** $x^2 + x - 2$

г) $x^2 - 1$ **д)** $x^2 - 2x - 3$ **ѓ)** $x^2 + 5x + 6$

е) $x^2 + 2x - 3$ **ж)** $x^2 + 3x + 2$ **з)** $x^2 - 9$

10. Ослободи се од заградите и упрости:

а) $(x+4)(x+5) + (x+3)(x+9)$ **б)** $(x+7)(x+1) + (x+2)(x+5)$

в) $x(x+2) + (x+8)(x+1)$ **г)** $(x+9)(x+2) - (x+4)(x+6)$

д) $(x+4)^2 + (x+3)^2$ **ѓ)** $(x+8)^2 - (x-3)^2$

11. Реши ги равенките:

а) $x(x+8)=(x+3)(x+4)$ **б)** $(x+4)(x+2)=(x+3)(x+1)$

в) $(x+2)^2=(x-3)^2$ **г)** $(x+4)(x+2)=(x-3)(x-4)$

12. Покажи дека $n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=3n^2+6n+5$

13. Ослободи се од заградите и упрости:

а) $(2x+3)(x+5)$ **б)** $(3x+1)(x-7)$ **в)** $(x-6)(2x+4)$ **г)** $(5x+3)(x-2)$

д) $(2x+1)(3x-5)$ **ѓ)** $(4x-3)(2x+1)$ **е)** $(8x+5)(3x-4)$ **ж)** $(5x-4)(x-5)$

з) $(3x-4)(x-2)$ **ѕ)** $(7x-1)(3x-2)$ **и)** $(5x+7)^2$ **ј)** $(4x-3)^2$

14.

а) $\frac{2}{x}+\frac{5}{x+7}$ **б)** $\frac{2}{x+3}+\frac{5}{x+1}$ **в)** $\frac{4}{x-7}+\frac{3}{x+5}$ **г)** $\frac{5}{x-3}-\frac{2}{x+4}$

7.10 Обиди и грешки

Некои равенки се претешки за да ги решиме со помош на еквивалентни трансформации.

Ваквите равенки, засега, ги решаваме со методот наречен **метод на обиди и грешки**.

Со овој метод правиме процена на решението и потоа се обидуваме да ја подобриме проценатa.

Пример 1

Со методот на обиди и грешки реши ја равенката $x^3-3x=322$

Прв обид: $x=5$: $5^3-3\cdot 5=125-15=110$ ➔ премало

Втор обид: $x=6$: $6^3-3\cdot 6=216-18=198$ ➔ премало

Трет обид: $x=7$: $7^3-3\cdot 7=343-21=322$ ➔ точно

Решението е $x=7$

Во последниот пример го најдовме точното решение на равенката.

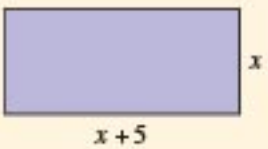
Понекогаш не е можно да го најдеме точното решение, па мораме да побараме приближно решение.

Целата постапка ќе ја прикажеме со табела.

Пример 2

Плоштината на дадениот правоаголник е 72 cm².

Со методот на обиди и грешки најди ја вредноста на x заокружена на 1 децимално место.



Плоштина на правоаголник = основа · соодветна висина.

Според тоа, $x(x+5)=72 \Rightarrow x^2+5x=72$

Процена	x^2+5x	Коментар	
6	$6^2+5\cdot 6=66$	премало	
7	$7^2+5\cdot 7=84$	преголемо	x лежи меѓу 6 и 7
6,3	$6{,}3^2+5\cdot 6{,}3=71{,}19$	премало	
6,4	$6{,}4^2+5\cdot 6{,}4=72{,}96$	преголемо	x лежи меѓу 6,3 и 6,4.
6,35	$6{,}35^2+5\cdot 6{,}35=72{,}0725$	преголемо	

Решението е помеѓу $x=6{,}3$ и $x=6{,}35$

Според тоа, решението е $x=6{,}3$ заокружено на 1 д.м.

Последниот обид со $x=6{,}35$ е потребен за да провериме дали решението е поблиску до 6,3 отколку до 6,4. Секогаш мораме да користиме број со едно децимално место повеќе отколку што се бара во задачата.

Задачи

Во решавањето на следните задачи користи го методот на обиди и грешки.

1. Симон го користи методот на обиди и грешки за да ја реши равенката $x^3-5x=56$

Во табелата се прикажани неговите први две процени.

Процена	x^3-5x	Коментар
4	$4^3-5\cdot 4=44$	премало
5	$5^3-5\cdot 5=100$	преголемо

Продолжи со пополнување на табелата за да дојдеш до приближното решение.

Решението заокружи го на 1 децимално место.

2. Во оваа задача треба да го најдеш решението на равенката што се наоѓа во даденият интервал.

Решенијата заокружи ги на 1 децимално место.

а) $x^2+5x=60$ ако x лежи помеѓу 5 и 6.

б) $x^2-2x=58$ ако x лежи помеѓу 8 и 9.

в) $x+\frac{10}{x}=8$ ако x лежи помеѓу 6 и 7.

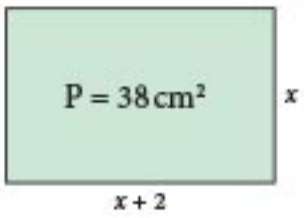
3. Пресметај ги решенијата на равенките заокружени на 1 децимално место.

а) $x^3+x=4$ **б)** $x^3-2x=10$ **в)** $2x^3-7x=9$ **г)** $2^x=20$

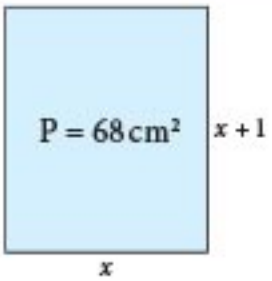
4. Запиши равенка по x за пресметување плоштина на дадените правоаголници.

Реши ги равенките и одреди ја вредноста на x заокружена на 1 децимално место.

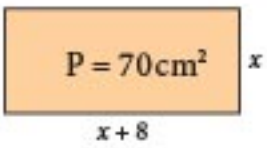
а)



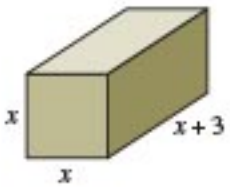
б)



в)



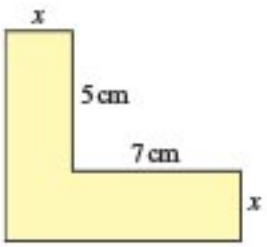
5. Квадарот на цртежот има волумен 250 cm³.



а) Покажи дека $x^3 + 3x^2 = 250$

б) Пресметај ја вредноста на x заокружена на 1 децимално место.

6. Плоштината на 2Д-формата на цртежот е 40 cm².

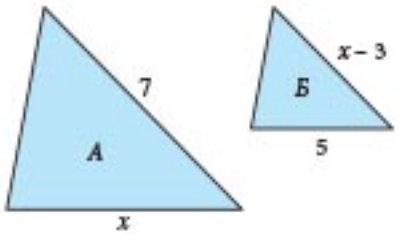


а) Покажи дека $x^2 + 12x = 40$

б) Пресметај ја вредноста на x заокружена на 1 децимално место.

Подели ја 2Д-формата на два правоаголника.

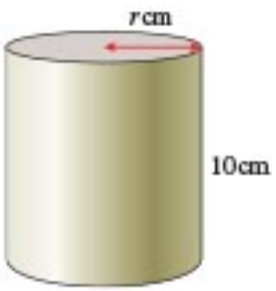
7. Триаголникот А е зголемување на триаголникот Б.



а) Запиши равенка по x и покажи дека таа може да се упрости до $x^2 - 3x = 35$.

б) Пресметај ја вредноста на x заокружена на 1 децимално место.

8. Плоштината P на цилиндар со радиус r и висина h е $P = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.



Даденият цилиндар има плоштина 300 cm².

а) Покажи дека $\pi r^2 + 10\pi r = 150$

б) Пресметај ја вредноста на r заокружена на 1 децимално место.

7.11 Неравенки

Претставување неравенки на бројна оска

Постојат четири знаци за неравенства што треба да ги знаеме.

$a > 2$ значи „a е поголем од 2“ или „2 е помал од a“

$b \geq 5$ значи „b е поголем или еднаков на 5“ или „5 е помал или еднаков на b“

$c < 3$ значи „c е помал од 3“ или „3 е поголем од c“

$d \leq 4$ значи „d е помал или еднаков на 4“ или „4 е поголем или еднаков на d“

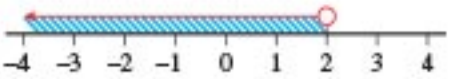
Неравенките имаат голема примена во секојдневниот живот.



Сообраќајниот знак за ограничување на брзината означува дека максималната брзина v km/h на возилата мора да биде најмногу 100 km/h. Тоа можеме да го запишеме на следниот начин: $v \leq 100$.

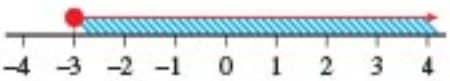
Неравенките често ги претставуваме на бројна оска.

$x < 2$ значи дека x е помал од 2. На бројната оска можеме да го прикажеме на следниот начин:



За < или > користиме празно крукче.

$x \geq -3$ значи „x е поголем или еднаков на -3“ и тоа можеме да го прикажеме на следниот начин:



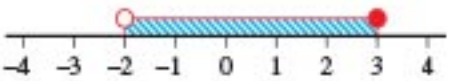
За ≤ или ≥ користиме обоено крукче.

$-2 < x \leq 3$ значи дека x е поголем од -2 и исто така е помал или еднаков на 3.

Полесен начин е да кажеме:

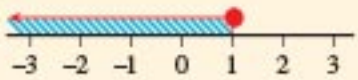
x лежи помеѓу -2 и 3. Тој не може да биде еднаков со -2, но може да биде еднаков на 3.

$-2 < x \leq 3$ можеме да го прикажеме на следниот начин:

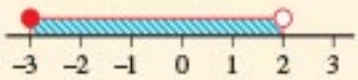


Пример 1

Запиши ги неравенките прикажани на бројните оски:

а) 

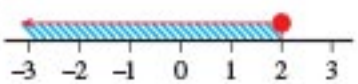
б) 

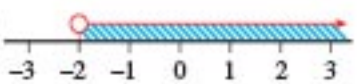
в) 

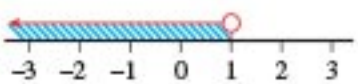
а) $x \leq 1$ б) $x > -3$ в) $-3 \leq x < 2$

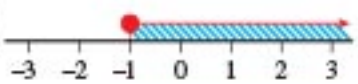
Задачи

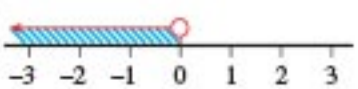
1. Запиши ги неравенките прикажани на бројните оски.

а) 

б) 

в) 

г) 

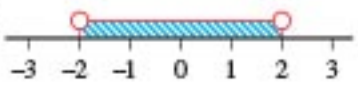
д) 

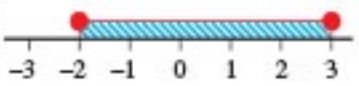
ѓ) 

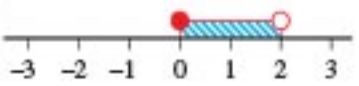
2. Прикажи ги неравенките на бројна оска.

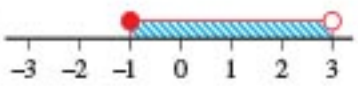
а) $x > 2$ б) $x < 4$ в) $x \geq -5$ г) $x \leq 1$

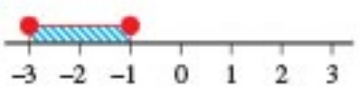
3. Запиши ги неравенките прикажани на бројните оски.

а)


б)


в)


г)


д)


ѓ)


4. Прикажи ги неравенките на бројна оска.

а) $1 \leq x < 4$ **б)** $-3 < x < 5$ **в)** $-4 < x \leq 2$ **г)** $3 \leq x \leq 5$

5. Нека x е цел број и $-2 \leq x < 4$

Набројте ги можните вредности на x.

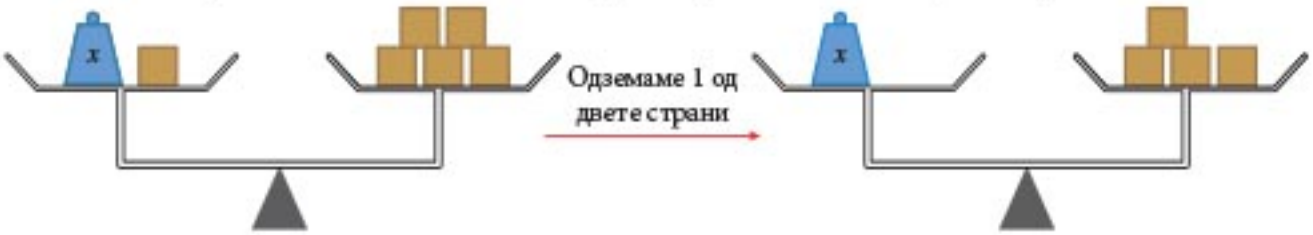
Цели броеви се природните броеви, нивните спротивни броеви и нулата.

6. **а)** Запиши го најмалиот можен цел број за кој важи: $-5 < x \leq 3$

б) Запиши го најголемиот можен цел број за кој важи: $-5 < x \leq 3$

Решавање линеарни неравенки

Решението на равенката $x + 1 = 5$ можеме да го прикажеме на следниот цртеж:



Според тоа, решението е $x = 4$.

Има само една вредност на x за која е точна равенката. Тоа е бројот 4.

Неравенката $x + 1 > 5$ можеме да ја прикажеме на сличен цртеж:



(Левата страна на вагата е потешка од десната страна на вагата.)

Според тоа, решението е $x > 4$.

Постојат многу вредности на x за кои неравенката е точна.

x може да биде кој било број поголем од 4.

Начинот на решавање неравенки е многу сличен со начинот на решавање равенки.

Кога решаваме неравенки:

- можеме да додаваме исти вредности на двете страни
- можеме да одземаме исти вредности од двете страни

- можеме да ги множиме или да ги делиме двете страни со ист **позитивен** број
- кога неравенката ја множиме или ја делиме со **негативен** број, тогаш мора да го **смениме и знакот** на неравенството.

Последното правило ќе го покажеме во следниот пример:

Да го разгледаме неравенството: $-2 < 5$

Знакот од < го сменивме во >.

Ако ги помножиме двете страни со (−3), ќе добиеме: $6 > -15$

Пример 2

Реши ја неравенката $2(3x - 4) < 10$ и нејзиното решение претстави го на бројна оска.

$2(3x-4) < 10$ Се ослободуваме од заградите.

$6x - 8 < 10$ Додаваме 8 на двете страни.

$6x < 18$ Двете страни ги делиме со 6.

$x < 3$



Пример 3

Реши ја неравенката $9 - 3x \leq 3$

Прв начин

$9 - 3x \leq 3$ Одземаме 9 од двете страни.

$-3x \leq -6$ Двете страни ги делиме со −3.

$x \geq 2$ Го менуваме знакот на неравенството.

Втор начин

$9 - 3x \leq 3$ Додаваме $3x$ на двете страни.

$9 \leq 3 + 3x$ Одземаме 3 од двете страни.

$6 \leq 3x$ Двете страни ги делиме со 2.

$2 \leq x$

Добивме $x \geq 2$

Задачи

1. Реши ги следните неравенки.

а) $x + 7 \leq 11$ **б)** $x - 2 > 3$ **в)** $x + 10 < 4$ **г)** $x - 5 > 4$

д) $x + 3 \geq -2$ **ѓ)** $2x > 8$ **е)** $3x \geq 21$ **ж)** $6x \leq 60$

з) $5x > -20$ **ѕ)** $\frac{x}{3} < 5$ **и)** $\frac{x}{2} \geq -8$ **ј)** $\frac{x}{7} < 15$

к) $2x+1<9$ **л)** $4x+3\geq 15$ **љ)** $3x-2>1$ **м)** $5x+2\leq 12$

н) $2x+3>8$ **њ)** $5x-2<3$ **о)** $4x+1\geq 7$ **п)** $2x+9>6$

2. Реши ги следните неравенки.

а) $7x+2>3x+22$ **б)** $6x-3\leq 5x+4$ **в)** $12x+5<8x+13$ **г)** $3x-5\leq 2x+8$

д) $4x-5\geq 2x+7$ **ѓ)** $3x+8>x-2$ **е)** $6x+7<3x-5$ **ж)** $9x+10<7x-3$

з) $3x+2\leq 12-2x$ **ѕ)** $2x+5>10-3x$ **и)** $3-5x\leq 6-7x$ **ј)** $6-2x>10-7x$

3. Реши ги следните неравенки.

а) $-2x\geq 6$ **б)** $-3x<15$ **в)** $-6x>-24$ **г)** $-4x\leq 6$

д) $10-2x>4$ **ѓ)** $15-4x\leq 3$ **е)** $14-3x<8$ **ж)** $2-5x\geq 7$

з) $6-x\geq 10$ **ѕ)** $7-2x>3$ **и)** $60-6x\leq 12$ **ј)** $16\geq 8-4x$

4. Реши ги следните неравенки.

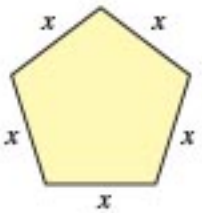
а) $x+7>3x+1$ **б)** $2x+14\leq 6x-2$ **в)** $6-9x<14-7x$

г) $36-27x>15-20x$ **д)** $40-16x\geq 14+2x$ **ѓ)** $24-9x\leq 12-6x$

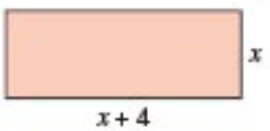
е) $7-5x>5-2x$ **ж)** $7-12x\geq 25-3x$ **з)** $1-x\leq 5x+7$

ѕ) $6-3x\leq 13+x$ **и)** $3-9x<2(3x-5)$ **ј)** $5-2(x+3)>8+x$

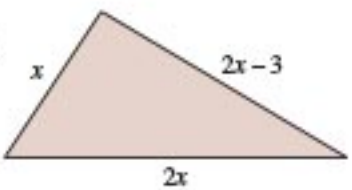
5. Периметарот на правилниот петаголник е помал од 42 cm.
Запиши неравенка со која ќе се пресмета x и реши ја.



6. Периметарот на правоаголникот е поголем од 36 cm.
Запиши неравенка со која ќе се пресмета x според податоците на цртежот.



7. Периметарот на триаголникот не смее да биде поголем од 45 cm.
Пресметај ја максималната вредност што може да ја има x.



8. **а)** Запиши го најмалиот цел број за кој е точна неравенката $3x>14$

б) Запиши го најмалиот број за кој е точна неравенката $2x-5>16$

в) Запиши го најголемиот цел број за кој е точна неравенката $4x-15<6$

9. Реши ги неравенките $4<2x\leq 10$ и прикажи го решението на бројна оска.

10. Реши ги следните неравенки и потоа набroј ги нивните целобројни решенија.

а) $6\leq 2x\leq 8$ **б)** $-8<2x<6$ **в)** $3\leq 3x\leq 18$ **г)** $2<\frac{x}{2}\leq 4$

д) $3<x+2<7$ **ѓ)** $2\leq x-4<5$ **е)** $-3\leq 2x+1\leq 7$ **ж)** $-5<3x-2\leq 7$

11. Реши ги неравенките.

а) $x+1\leq \frac{x-1}{4}$ **б)** $\frac{x-2}{2}>\frac{x+3}{7}$ **в)** $\frac{x-5}{3}\leq \frac{5-x}{2}$ **г)** $\frac{2x-3}{4}\geq \frac{3x-2}{5}$

12. Дадени се неравенките: $x + 3 \geq 7$ $2x - 3 < 20$

а) Реши ги дадените неравенки.

б) Одреди го интервалот на вредности на x за кој двете неравенки се точни.

13. Дадена е неравенката $4x + 5y \leq 20$, така што x и y се позитивни цели броеви (без нулата).

Одреди ги сите можни парови вредности на x и y за кои е точна неравенката.

Задачи за повторување

1. $y = \frac{3x^2 - 8}{x - 2}$

Пресметај ја вредноста на y кога:

а) $x = 3$ **б)** $x = -2$

2. Формулата $s = \frac{1}{2}(u + v)t$ се користи во физиката.

а) Пресметај ја вредноста на s, ако $u = 5$, $v = 7$ и $t = 4$.

б) Пресметај ја вредноста на s, ако $u = -4$, $v = 9$ и $t = 6$.

в) Пресметај ја вредноста на t, ако $s = 60$, $u = 13$ и $v = -3$.

г) Одреди ја вредноста на v, ако $s = 45$, $u = -2$ и $t = 15$.

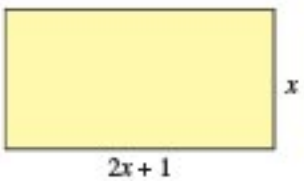
3. Едно парче манго чини x денари, а едно парче ананас чини $(x + 1)$ денари.

Запиши формула за вкупната цена T во денари што треба да се плати за 5 ананаси и 10 манга.

4. Запиши формула за:

а) плоштината P на правоаголникот според податоците на цртежот.

б) периметарот L на правоаголникот според податоците на цртежот.



5. Изрази го x од следниве формули.

а) $y = x - 8$ **б)** $y - a = 3x$ **в)** $a(2x - 5) = c$ **г)** $a - cx = b$

д) $h(f - 2x) = 3g^2$ **ѓ)** $\frac{x}{5p} = q$ **е)** $\frac{x}{2a + 3b} = 4c$ **ж)** $\frac{x + m}{n} = 5p$

з) $\frac{10}{x} = y$ **ѕ)** $\frac{3x}{a} = \frac{4b}{c}$ **и)** $\frac{y}{x - 5} = 2$ **ј)** $2y = 5 - \frac{1}{x}$

к) $y = \frac{1}{5}x - 4$ **л)** $2 - x^2 = y$ **љ)** $\frac{x^2}{3} - 1 = y$ **м)** $\sqrt{x - 4} = 2y$

6. Одреди ги коефициентите на правец на правите што минуваат низ точките:

а) $(2, 5)$ и $(6, 7)$ **б)** $(2, -3)$ и $(-2, 6)$.

7. Нацртај график на правата $x - 3y = 6$.

8. Одреди го коефициентите на правец за секоја од правите.

а) $y = 2x + 9$ **б)** $y = 7 - 3x$ **в)** $3x + 6y = 12$ **г)** $2y - 5x = 15$

9. Реши го графички системот равенки:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-7y=-7 \end{cases}$$

10. w е правопропорционален на h.

$w = 8$ кога $h = 12$

Одреди го w кога $h = 15$.

11. Ако $a = 5$ и $b = -2$, пресметај ја вредноста на изразите:

а) $a^2 + b^2$ **б)** $5a - 6b$ **в)** $\frac{4a}{b}$ **г)** $2a^2 + b$

12. Ослободи се од заградите и упрости:

а) $(x+7)(x+2)$ **б)** $(x-6)(x+3)$ **в)** $(x+1)(x-2)$

г) $(x-5)(x-9)$ **д)** $(x+4)^2$ **ѓ)** $(x-2)^2$

13. Реши ги системите равенки.

а) $\begin{cases} 5x+2y=13 \\ x+2y=9 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 3x+2y=18 \\ 2x-y=5 \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 3x-2y=15 \\ 2x-3y=5 \end{cases}$

14. Симона го користи методот на обиди и грешки за да најде решение на равенката $2x - \frac{1}{x} = 9$

Таа знае дека решението лежи помеѓу 4 и 5.

Табелата ги прикажува нејзините први две процени.

Процена	$2x - \frac{1}{x}$	Коментар
4	$(2 \cdot 4) - (1 : 4) = 7{,}75$	премало
5	$(2 \cdot 5) - (1 : 5) = 9{,}8$	преголемо

Продолжи со пополнување на табелата за да го најдеш решението на равенката.

Заокружи го решението на 1 децимално место.

15. Реши ги неравенките.

За секоја неравенка прикажи го решението на бројна оска.

а) $2x \geq 8$ **б)** $x - 4 < 7$ **в)** $3x + 1 \geq 8$ **г)** $3x + 5 \leq x - 8$

8 Геометрија и решавање проблеми

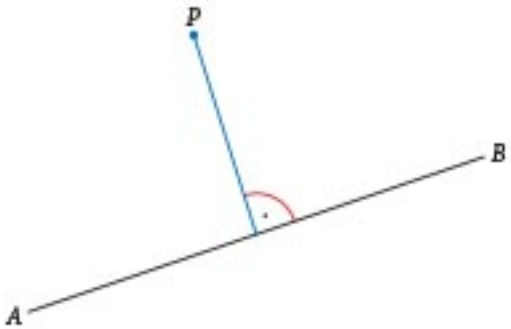
Наставни цели

- Користи линијар и шестар:
  - за да конструира нормала од точка до права и нормала од точка на правата;
  - за да впише квадрати, рамностранитриаголници и правилни шестаголници и осумаголници преку цртање поделби на круг.
- Наоѓа геометриско место на точки на одредено растојание од дадена точка или од дадена права.
- Прави и користи цртежи во размер и толкува мапи.
- Пресметува внатрешни и надворешни агли на кој било правилен многуаголник; ја докажува и ја користи формулата за збир на внатрешни агли на многуаголник; докажува дека збирот на надворешните агли на многуаголник е 360°.
- Решава проблеми со користење на својствата на агли, паралелни прави и прави што се сечат, и на триаголници, други многуаголници и круг; ги образложува заклучоците и го објаснува размислувањето со дијаграми и зборови.
- Создава шаблони од триаголници и четириаголници што се повторуваат за покривање на рамнина, користејќи збир на агли, ротација за 180° и транслација; знае кој правилен многуаголник ќе ја покрие рамнината и објаснува зошто не може со други.
- Мери агли во правец на стрелките на часовникот од север за решавање проблеми поврзани со правец и насока.
- Ја знае и ја користи Питагоровата теорема за да реши рамнински проблеми, вклучувајќи правоаголни триаголници.
- Заокружува броеви до одреден број на децимални места; заокружувањето го користи за да дојде до решение на проблем со одреден степен на точност.

8.1 Конструкција на прави

Конструкција на нормала на права низ дадена точка надвор од правата

На цртежот се претставени правата AB и точката P што не лежи на правата AB.



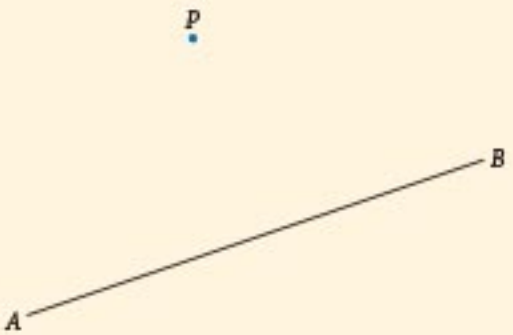
Од точката P е повлечено најкраткото растојание кон правата AB. Ако ја продолжиме добиената отсечка од двете страни ќе добиме права.

Добиената права е **нормала** на правата AB, односно зафаќа прав агол со правата AB.

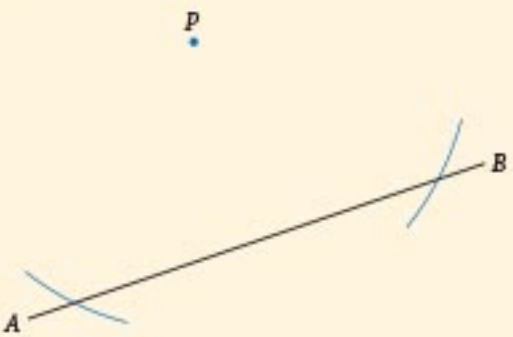
Во следниот пример ќе покажеме како да конструираме, само со линијар и шестар, нормала на права од точка што лежи надвор од правата.

Пример 1

Конструирај права низ P што е нормална на правата AB.



Со шестарот цртаме два исти кружни лака со центар во P така што лаците ја сечат AB во две различни точки.

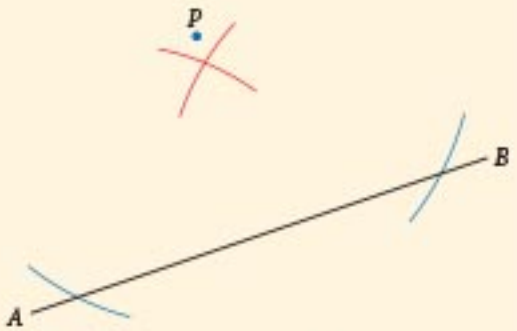


Потоа, треба да конструираме симетрала на отсечката помеѓу добиените две точки.

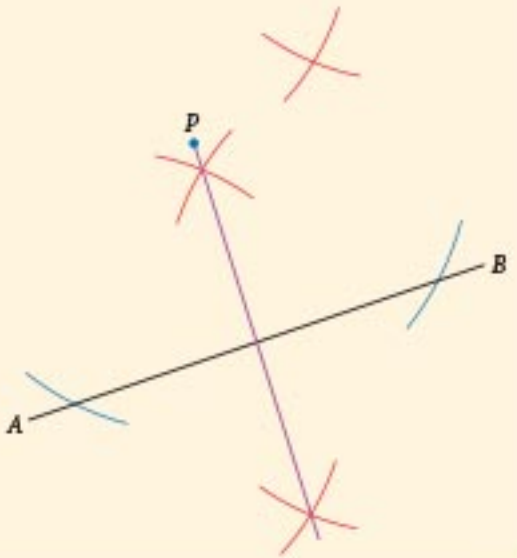
Цртаме по еден кружен лак од двете страни на правата AB, со центар во една од двете точки.

Постапката ја повторуваме со центар во другата точка.

Во текот на целата конструкција на четирите последни лаци не го менуваме аголот меѓу краците на шестарот.



Со линијар ги поврзуваме пресеците на лаците како што е прикажано на цртежот.



Ја конструиравме правата низ P што е нормална на правата AB.

Конструкција на нормала на права низ дадена точка што лежи на правата

Ќе покажеме како да конструираме нормала на права од точка што лежи на правата.

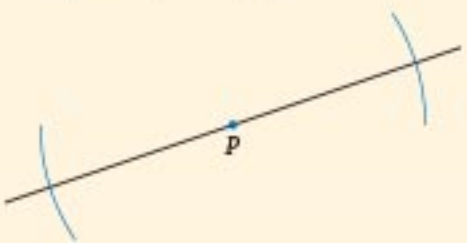
Во следниот пример ќе ги покажеме сите чекори на оваа постапка.

Пример 2

Нацртај права нормална на дадената права што минува низ точката P, што лежи на правата.



Прво цртаме два кружни лака со центар во P, така што тие ја сечат правата во две различни точки што се на исто растојание од P.

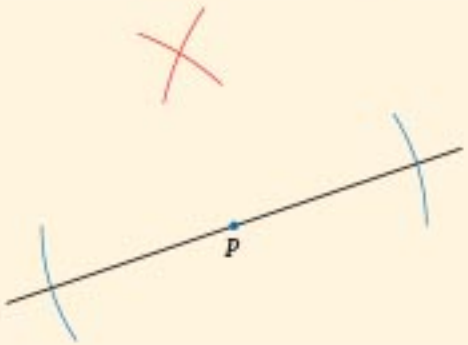


Следно, цртаме симетрала на отсечката помеѓу тие две точки.

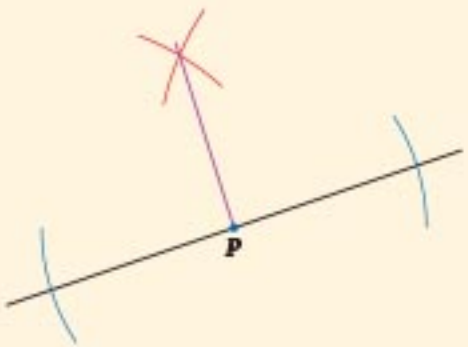
Цртаме кружен лак од едната страна на правата, со центар во една од двете точки.

Цртаме кружен лак од другата страна на правата, со центар во другата точка.

Исто како и во претходниот пример, во текот на целата конструкција на последните два лака не го менуваме аголот меѓу краците на шестарот.



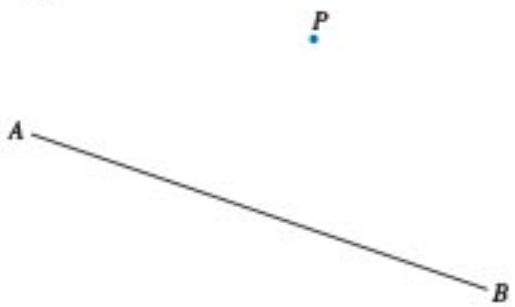
Пресекот на лаците го поврзуваме со точката P.



Ја конструиравме бараната права.

Задачи

1. Прецртај го цртежот во тетратка.



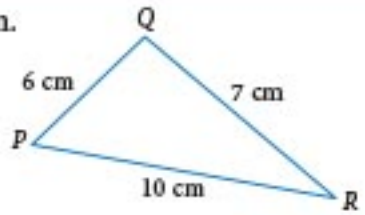
Конструирај права низ P што е нормална на правата AB.

2. Прецртај го цртежот во тетратка.

Конструирај права низ M што е нормална на правата ST.



3. PQR е триаголник со страни: $\overline{PQ} = 6$ cm, $\overline{QR} = 7$ cm и $\overline{PR} = 10$ cm.



а) Конструирај прецизен цртеж на триаголникот.

б) Конструирај права низ Q нормална на $\overline{PR}$.

Означи ја со M точката во којашто добиената права ја сече $\overline{PR}$.

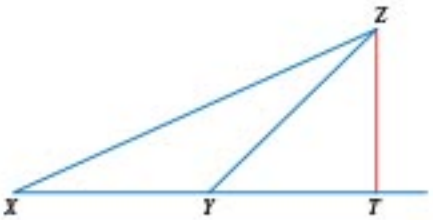
в) Измери ја должината на $\overline{QM}$.

г) Користи ја таа должина за да ја пресметаш плоштината на триаголникот PQR.

4. XYZ е триаголник. $\overline{XY} = 5$ cm, $\overline{YZ} = 7$ cm и $\overline{XZ} = 11$ cm.

а) Конструирај прецизен цртеж на триаголникот XYZ.

б) Продолжи ја страната на триаголникот откај точката Y.



Нацртај нормала од Z до оваа права.

Означи ја со T точката во која што нормалата ја сече правата.

в) Измери ја должината $\overline{ZT}$.

г) Пресметај ја плоштината на триаголникот XYZ.

5. **а)** Нацртај отсечка долга 10 cm.

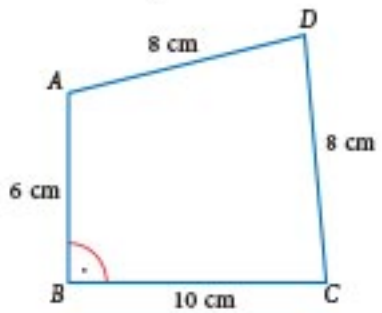
Означи две точки на отсечката чие растојание е точно 6 cm.

б) Со конструкција на нормали, нацртај правоаголник со должина 6 cm и ширина 4 cm.

Секој внатрешен агол на правоаголникот е 90°. Започни со конструирање на правите агли во двете точки што се оддалечени 6 cm.

в) Одреди ја должината на дијагоналата на правоаголникот.

6. Конструирај прецизен цртеж на четириаголникот $ABCD$ прикажан подолу.



а) Нацртај права и означи точки B и C, така што нивното меѓусебно растојание е 10 cm.

б) Конструирај права низ B што е нормална на $\overline{BC}$.

На таа права означи точка A на растојание 6 cm нагоре по правата.

За да конструираш прав агол, правата треба да ја продолжиш налево од кај точката B.

в) Со шестарот нацртај лак со центар во A и радиус 8 cm.

Со истиот радиус на шестарот, нацртај друг лак со центар во C.

Означи точка D во пресечната точка на двата лака.

Нацртај ги правите AD и CD.

г) Одреди ја големината на аголот ADC.

8.2 Конструкција на правилни многуаголници

Во овој дел ќе научиме како да **конструираме** правилен **многуаголник** впишан во кружница.

Сите темиња на многуаголникот треба да лежат на кружницата.

Во следните примери се прикажани начините на конструкција на правилен шестаголник, рамностран триаголник, квадрат и правилен осумаголник.

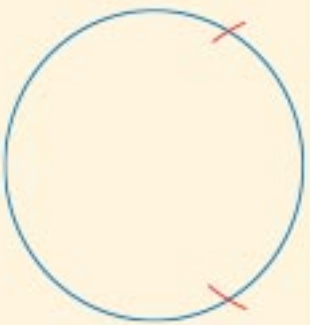
Пример 1

Конструирај правилен шестаголник впишан во кружница со радиус 5 cm.

Прво цртаме кружница со радиус 5 cm.

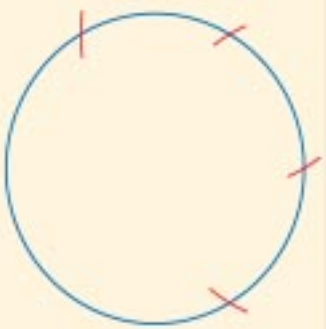
Во текот на целата постапка нема да го менуваме аголот меѓу краците на шестарот.

Го ставаме врвот од шестарот во една точка на кружницата.

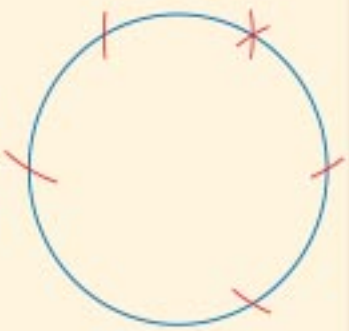


Цртаме два кружни лака со центар во таа точка од кружницата, така што лаците ја сечат кружницата во две различни точки.

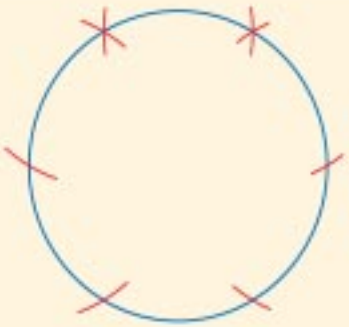
Цртаме нови два кружни лака со центар во едната пресечна точка, така што ја сечат кружницата во две различни точки.



Повторно цртаме два кружни лака со центар во новата точка, така што ја сечат кружницата во две различни точки.

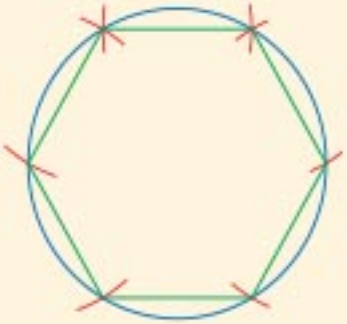


Постапката ја повторуваме за сите нови точки сè додека не означиме шест различни точки на кружницата.



На крај ги поврзуваме шесте точки на кружницата што формираат правилен шестаголник.

Секоја страна на шестаголникот е еднаква на радиусот на кружницата.



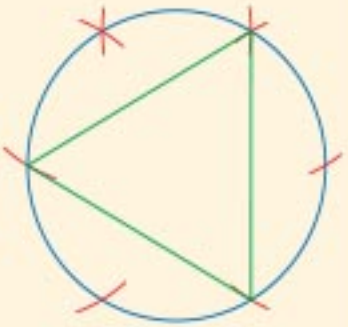
Пример 2

Конструирај рамностран триаголник впишан во дадена кружница.

Ги повторуваме сите чекори за цртање шестаголник (од пример 1) до означувањето на шесте точки.

На крај поврзуваме три од шесте точки, при што внимаваме кои три точки ќе ги поврземе за да добиеме рамностран триаголник.

Добивме рамностран триаголник впишан во кружница.

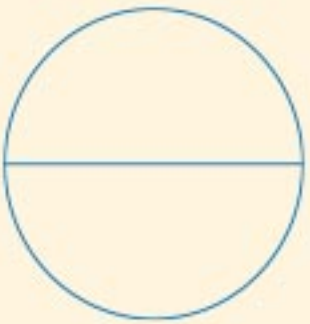


Пример 3

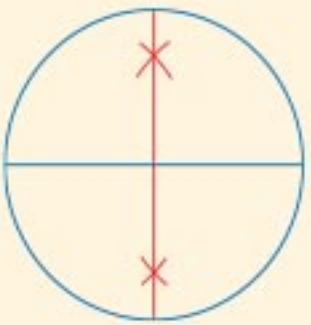
Конструирај квадрат впишан во кружница со дијаметар 10 cm.

Прво цртаме кружница со точниот радиус.

Цртаме дијаметар на кружницата.

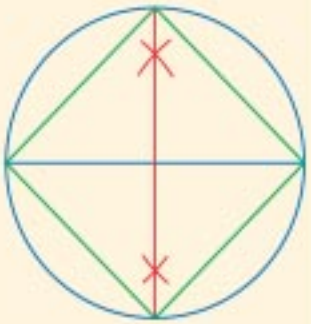


Конструираме симетрала на дијаметарот со помош на лаци над и под дијаметарот.



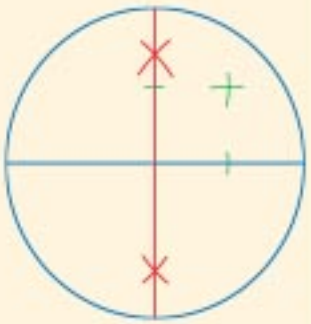
Ги поврзуваме четирите точки во кои дијаметарот и симетралата ја сечат кружницата.

Конструиравме квадрат впишан во кружница.



Пример 4

Конструирај правилен осумаголник впишан во кружница со дијаметар 10 cm.



Ги следиме првите три чекори за конструкција на квадрат (од пример 3).

Добивме две заемно нормални отсечки (дијаметар и неговата симетрала) што се сечат во центарот на кружницата.

Конструираме симетрала на еден од правите агли.
Цртаме кружни лаци со центар во центарот на кружницата, така што ги сечат краците на правиот агол во две точки. Од секоја од точките повлекуваме по еден кружен лак така што двата кружни лака се сечат во една точка.

Повлекуваме права низ пресекот на двата кружни лака и центарот на кружницата што треба да ја пресече кружницата.

Потоа конструираме симетрала на другите два прави агла што треба да ја пресече кружницата.

Добиваме цртеж како даденият.



Ги поврзуваме осумте добиени точки на кружницата и го добиваме правилниот осумаголник.



Задачи

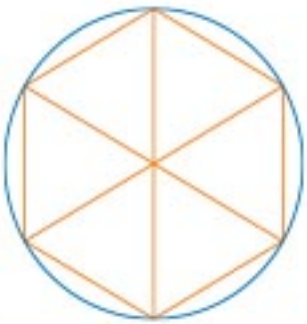
1. Нацртај кружница со радиус 6 cm.
   - **а)** Конструирај квадрат впишан во дадената кружница.
   - **б)** Одреди ја должината на дијагоналата на квадратот.
   - **в)** Одреди ја должината на страната на квадратот.
2. Нацртај кружница со радиус 6 cm.
   - **а)** Конструирај рамностран триаголник впишан во кружницата.

б) Одреди ја должината на страната на триаголникот.

в) Пресметај ја плоштината на триаголникот.

3. Впиши ги следниве форми во кружница со радиус 5 cm.

а)



б)



в)



Во задачите **4** и **5** нацртај кружници со радиус најмалку 5 cm. Така лесно ќе можеш да ги нацрташ симетралите.

4. Конструирај правилен шестаголник впишан во кружница.

Конструирај симетрала на секоја негова страна.

Користи ги овие симетрали за да конструираш правилен дванаесетаголник впишан во кружницата.

5. Конструирај правилен осумаголник впишан во кружница.

Користи го осумаголникот за да конструираш правилен шеснаесетаголник впишан во кружницата.

8.3 Геометриско место на точки

Геометриско место на точки (ГМТ) е множество точки што исполнуваат зададено својство. ГМТ може да биде линија или област.

Пример 1

Најди го геометриското место на точки што се оддалечени 3 cm од точката X.



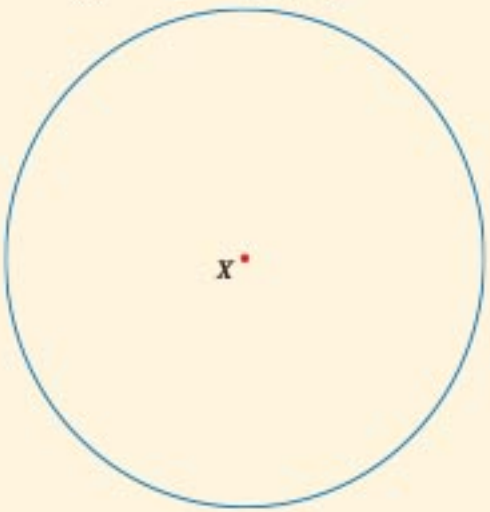
Со помош на линијар можно е да најдеме повеќе точки кои се оддалечени 3 cm од X.

На цртежот се прикажани неколку вакви точки означени со сина боја.



Сепак, постојат многу точки што го исполнуваат даденият услов.

Јасно е дека сите тие лежат на кружница со радиус 3 cm.



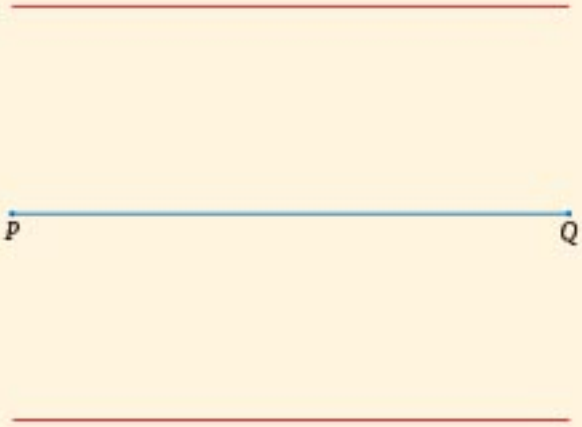
Оваа кружница е геометриското место на точки што се оддалечени 3 cm од X.

Пример 2

$\overline{PQ}$ е отсечка долга 7 cm.



Нацртај геометриско место на точки што се оддалечени точно 2,5 cm од отсечката $\overline{PQ}$.



На едната страна од $\overline{PQ}$ цртаме отсечка паралелна на $\overline{PQ}$, што е оддалечена 2,5 cm од неа

Сите точки од новата отсечка се оддалечени 2,5 cm од $\overline{PQ}$, па оваа отсечка е дел од бараното геометриско место на точки

На другата страна на $\overline{PQ}$ можеме да нацртаме друга отсечка.

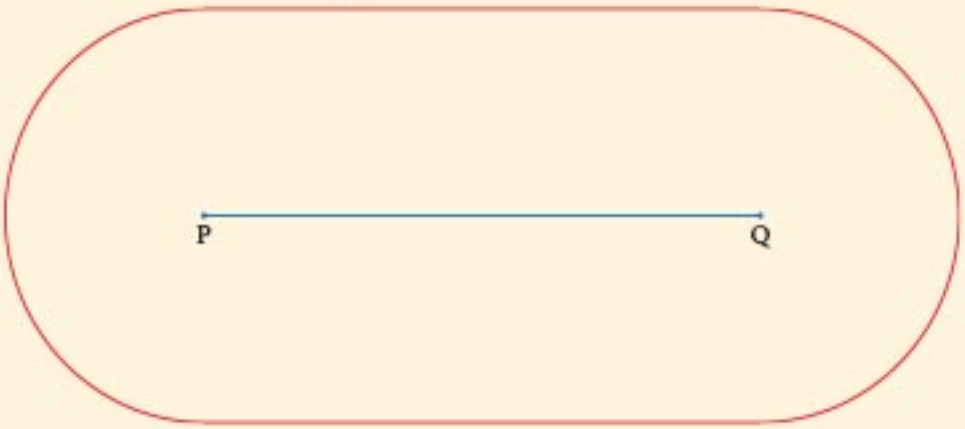


На левиот крај на отсечката $\overline{PQ}$, геометриското место на точки ќе се состои од сите точки што се оддалечени 2,5 cm од точката P.

Тоа е полукружница со центар P и радиус 2,5 cm.

Слично, на другиот крај на отсечката $\overline{PQ}$, кај точката Q, има друга полукружница.

На цртежот е претставено бараното геометриско место на точки во целост.



Задачи



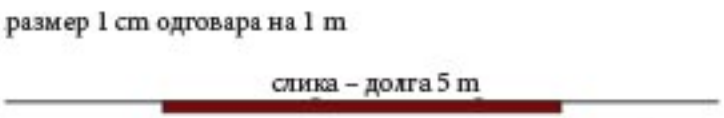
1. Еден пајак се наоѓа на крајот од часовната стрелка на часовникот.

   Стрелката е долга 4,8 сантиметри.

   Нацртај го геометриското место на точки низ кое поминува пајакот додека работи часовникот.

2. Една слика е закачена на ѕид во една галерија.

   Дадена е перспективата одозгора на ѕидот со сликата.

   На посетителите во галеријата им е оневозможен пристап поблиску од 2 метра до сликата.

   Галеријата решила да стави мала ограда за да ги задржи луѓето подалеку од сликата.

   Нацртај цртеж за да го прикажеш геометриското место на сите точки што се оддалечени 2 метра од сликата.

3. Означи точка A во тетратка.

   Нацртај го геометриското место на точки што се оддалечени 3,5 cm од A.

4. Во тетратка нацртај отсечка долга 4,5 cm.

   Нацртај го геометриското место на точки што се оддалечени точно 3 cm од отсечката.

5. Нацртај две точки оддалечени меѓу себе за 6 сантиметри. Означи ги точките со буквите A и B.

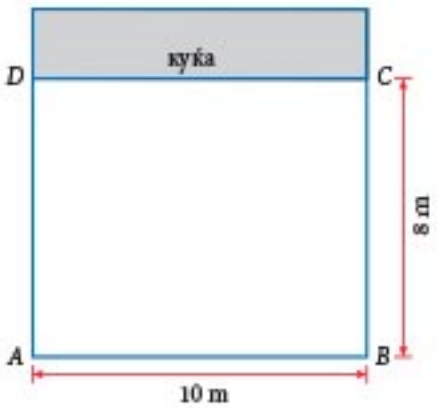
ГМТ што се на исто растојание од една точка е кружница.

а) Нацртај го геометриското место на точки што се оддалечени 4 cm од A.

б) Нацртај го геометриското место на точки што се оддалечени 4 cm од *B*.

в) Колку точки се оддалечени 4 cm од двете точки *A* и *B*?
Означи ги тие точки на цртежот.

6. Даден е план на правоаголната градина *ABCD*.
Димензиите на градината се 10 метри и 8 метри.
Сопственикот сака да засади дрво во градината.
Тој сака дрвото да биде точно на 5 метри од куќата.
Дрвото, исто така, треба да биде на 4 метри од аголот во A.



а) Нацртај план на градината. Користи го размерот 1 cm одговара на 1 m.

б) На цртежот нацртај геометриско место на точки што се на 5 метри растојание од куќата.

в) На цртежот нацртај геометриско место на точки што се на 4 метри растојание од A.

г) Означи ја положбата на дрвото со буквата *X*.

X ќе биде точката каде што се сечат двете геометриски места на точки.

д) Измери го растојанието $\overline{BX}$.

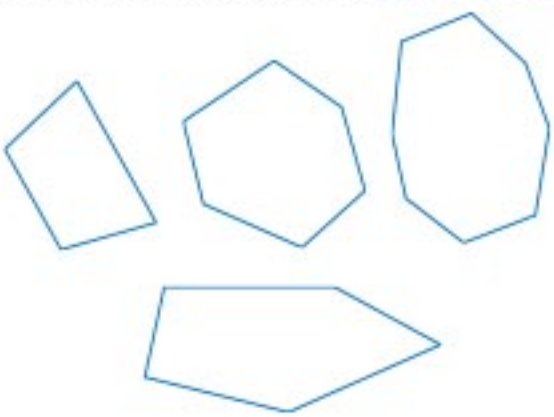
7. Нацртај квадрат со страна 5 cm.
Нацртај геометриското место на точки надвор од квадратот што е оддалечено точно 3 cm од страните на квадратот.

За секое теме постојат повеќе точки што се на растојание 3 cm од темето. Тие точки формираат крива.

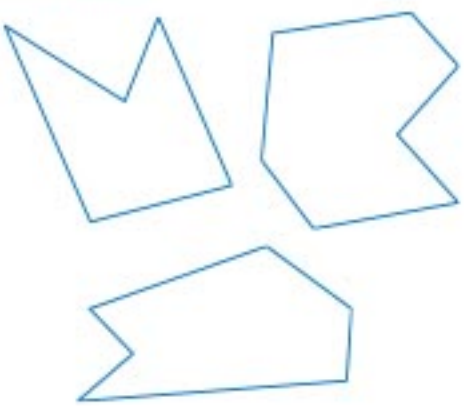
8.4 Агли на многуаголник

Внатрешни агли

Многуаголник е 2Д-форма со прави страни.
Многуаголниците можат да бидат **конвексни** и **неконвексни**.



конвексни многуаголници



неконвексни многуаголници

Неконвексните многуаголници имаат едно **теме** вовлечено во внатрешноста на многуаголникот.

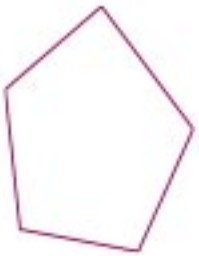
Еве неколку примери на многуаголници.



триаголник
3 страни



четириаголник
4 страни



петаголник
5 страни



шестаголник
6 страни



седумаголник
7 страни



осумаголник
8 страни



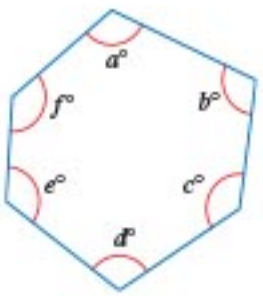
деветаголник
9 страни



десетаголник
10 страни

Внатрешни агли на многуаголникот се аглите кај темињата одвнатре во 2Д-формата.

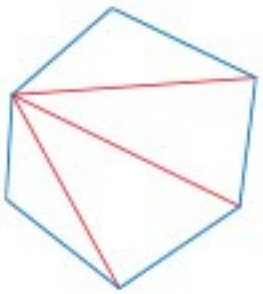
Внатрешните агли на овој шестаголник се $a°$, $b°$, $c°$, $d°$, $e°$ и $f°$.



Со цртање **дијагонали** шестаголникот можеме да го поделиме на четири триаголници.

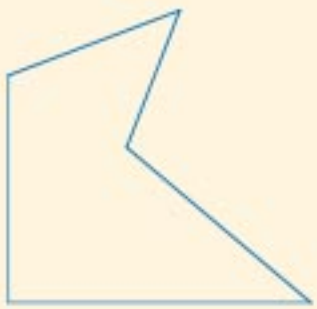
Збирот на внатрешните агли на секој триаголник е 180°.

Збирот на внатрешните агли на шестаголникот е $4 \cdot 180° = 720°$

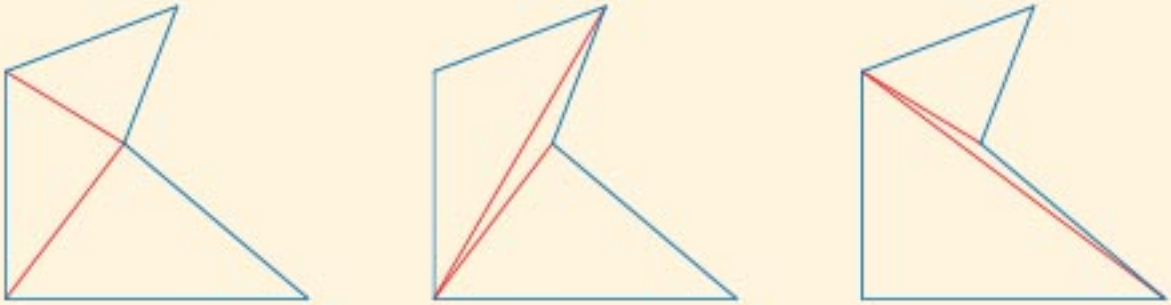


Пример 1

Со цртање дијагонали пресметај го збирот на внатрешните агли во даденият петаголник.



Постојат неколку начини за да нацртаме дијагонали и да го поделиме петаголникот на триаголници.



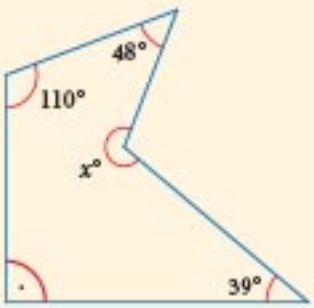
Без разлика на кој начин да ги нацртаме дијагоналите, секогаш постојат три триаголници.

Значи, $3 \cdot 180° = 540°$.

Збирот на внатрешните агли во петаголник е 540°.

Пример 2

Користи го резултатот од претходниот пример за да го пресметаш непознатиот агол во дадениот петаголник.



Збирот на четирите дадени агли е $48° + 110° + 90° + 39° = 287°$.

Збирот на внатрешните агли во петаголникот е 540°.

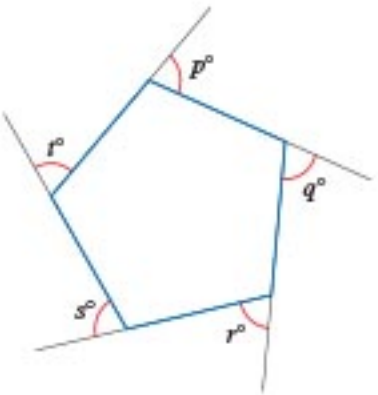
Непознатиот агол е $540° - 287° = 253°$.

Да провериме дали аголот е поголем од 180° и помал од 270°.
Добиеното решение 253° е точно.

Надворешни агли

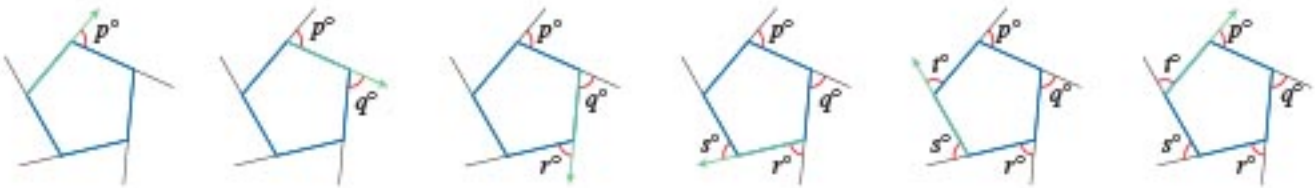
Надворешните агли на конвексен многуаголник се формираат со продолжување на страната во секое теме.

Надворешните агли на петаголникот се прикажани на цртежот десно.



Во секое теме внатрешниот и надворешниот агол лежат на една права.

Во секое теме: **внатрешен агол + надворешен агол = 180°**



Да замислиме една стрелка по должината на една страна од петаголникот.

Таа ротира за агол $p°$ во насока на движењето на стрелките на часовникот и се поклопува со соседната страна на петаголникот.

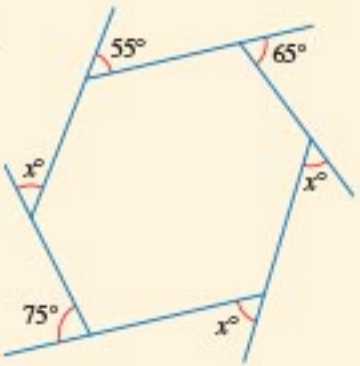
Потоа, ротира за агол $q°$, па за $r°$, па за $s°$ и на крај за $t°$.

Ротацијата цело време е во насока на движењето на стрелките на часовникот. На крајот, стрелката повторно се враќа од каде што тргнала. Таа се свртила за 360°.

Покажавме дека **збирот на надворешните агли на конвексен многуаголник е 360°.**

Пример 3

Пресметај ја големината на аглите означени со $x°$ на цртежот.



Збирот на надворешните агли е 360°.

$$55 + 65 + x° + x° + 75 + x° = 360$$
$$195 + 3x° = 360$$
$$3x° = 165$$
$$x° = 55°$$

Задачи

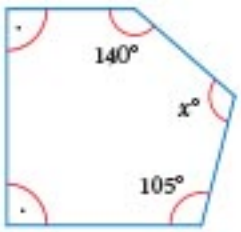
1. **а)** Нацртај осумаголник.
   б) Нацртај дијагонали за да го поделиш осумаголникот на триаголници.
   в) Колку такви триаголници постојат?
   г) Пресметај го збирот на внатрешните агли на осумаголникот.
2. Препиши ја дадената табела во тетратка.

Број на страни	Име на многуаголник	Број на триаголници	Збир на внатрешните агли
3	триаголник	1	180°
4			
5			
6	шестаголник	4	720°
7			
8			
9			
10			
12	дванаесетаголник		

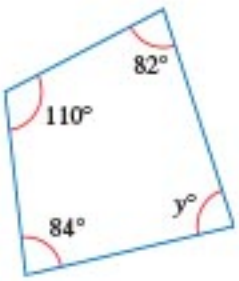
   а) Запиши ги имињата на многуаголниците. Некои имиња се веќе запишани.
   б) Нацртај цртеж за секој многуаголник и подели ги многуаголниците на триаголници. Запиши го бројот на триаголници во табелата.
   в) Пресметај го збирот на внатрешните агли и пополни ја последната колона.

3. Користи ги решенијата на претходната задача за да ги најдеш непознатите агли во многуаголниците.

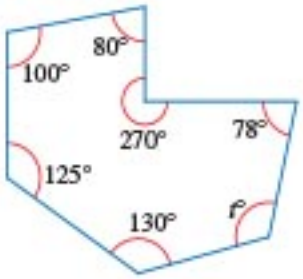
а)



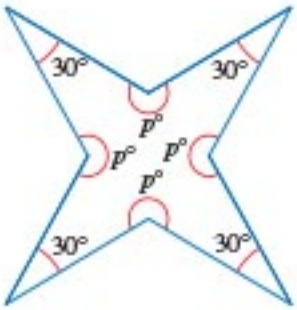
б)



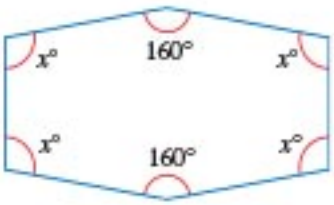
в)



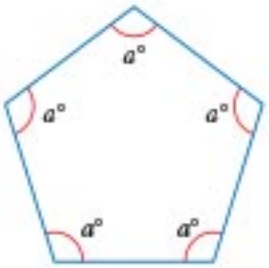
г)



д)

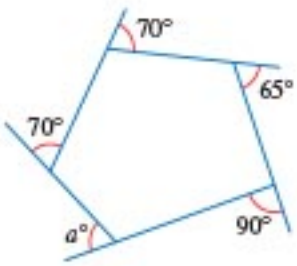


ѓ)

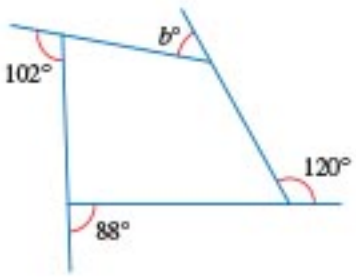


4. Пресметај ги непознатите агли во многуаголниците.

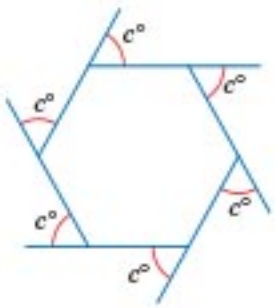
а)



б)



в)



5. Дадени се четири тврдења за неконвексните многуаголници.

Одреди кои од нив се точни, а кои се неточни.

Нацртај цртежи за да ги објасниш твоите одговори.

Мораш да направиш неколку скици за да провериш дали можат да се конструираат тие многуаголници.

а) Неконвексните многуаголници имаат барем еден внатрешен агол поголем од 180°.

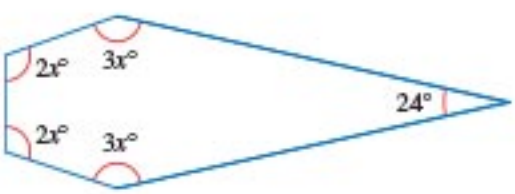
б) Неконвексните многуаголници не можат да се поделат на триаголници.

в) Невозможно е да се нацрта неконвексен триаголник.

г) Невозможно е да се нацрта неконвексен четириаголник.

6. На цртежот е даден конвексен петаголник.

Пресметај ја вредноста на x.



Состави равенка користејќи ги дадените агли и збирот на аглите во петаголникот.

Правилни многуаголници

Сите страни на **правилен многуаголник** се еднакви меѓу себе.

Сите агли на правилен многуаголник се еднакви меѓу себе.

Збир на внатрешни агли

Ако многуаголникот има n страни, тој може да се подели на $n - 2$ триаголници.

Збирот на внатрешните агли е $(n - 2) \cdot 180°$ или $180°(n - 2)$.

Оттука ја добиваме општата формула:

збирот на внатрешните агли на многуаголникот со n страни е $180°(n - 2)$

Збир на надворешни агли

Многуаголникот има n страни.

Во секое теме внатрешниот агол + надворешниот агол = 180°.

Има n темиња, па збирот на сите внатрешни агли + надворешните агли = $180° \cdot n$ или $180°n$

Но, збирот на внатрешните агли е $180°(n - 2)$

Според тоа, збирот на надворешните агли $= 180°n - 180°(n - 2)$

$= 180°n - 180°n + 360°$

$= 360°$

Покажавме дека збирот на надворешните агли на многуаголник е 360°.

Пример 4

Пресметај го збирот на внатрешните агли на многуаголник со 20 страни.

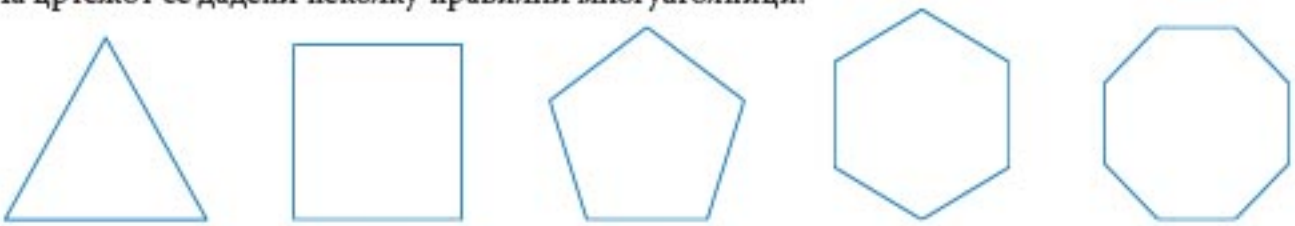
Заменуваме $n = 20$ во формулата $180°(n - 2)$.

$180 \cdot (20 - 2) = 180 \cdot 18$

$= 3240$

Збирот на внатрешните агли е 3240°.

На цртежот се дадени неколку правилни многуаголници.



рамностран триаголник | квадрат | правилен петаголник | правилен шестаголник | правилен осумаголник

Надворешен агол

Збирот на надворешните агли на правилен многуаголник е 360°.

Сите надворешни агли се еднакви меѓу себе.

Секој надворешен агол = 360°: со бројот на страни на многуаголникот.

$$\textbf{надворешен агол на правилен многуаголник со } n \textbf{ страни} = \frac{360^\circ}{n}.$$

Внатрешен агол

Постојат два начина за наоѓање на внатрешните агли на правилен многуаголник.

1 Со помош на формулата за збирот на внатрешните агли.

Збирот на внатрешните агли на многуаголник со n страни е $180^\circ(n-2)$.

Сите внатрешни агли се еднакви.

$$\textbf{внатрешен агол на правилен многуаголник со } n \textbf{ страни} = \frac{180^\circ(n-2)}{n}.$$

2 Со помош на надворешните агли.

Секој надворешен агол $= \frac{360^\circ}{n}$

Збирот на надворешниот и внатрешниот агол во секое теме е 180°.

$$\textbf{внатрешен агол на правилен многуаголник со } n \textbf{ страни} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

Пример 5

Еден правилен многуаголник има 15 страни.

а) Пресметај го внатрешниот агол.

б) Пресметај го надворешниот агол.

в) Провери дали нивниот збир е 180°.

а) Заменуваме $n = 15$ во $\frac{180^\circ \cdot (n-2)}{n}$

$$= \frac{180 \cdot (15-2)}{15}$$
$$= \frac{180 \cdot 13}{15}$$
$$= \frac{2340}{15}$$
$$= 156$$

Секој внатрешен агол е 156°.

б) Заменуваме $n = 15$ во $\frac{360^\circ}{n}$

$$= \frac{360}{15}$$
$$= 24$$

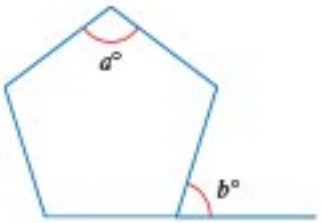
Секој надворешен агол е 24°.

в) Проверка: $156^\circ + 24^\circ = 180^\circ$ ✓

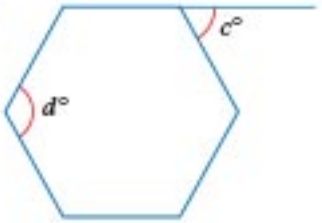
Задачи

1. На цртежите се дадени правилни многуаголници. Пресметај ги аглите означени со букви.

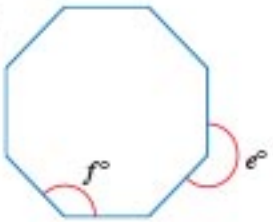
а)



б)



в)



2. Пресметај го: **i** внатрешниот агол и **ii** надворешниот агол на правилниот многуаголник со:

а) 9 страни

б) 12 страни

в) 20 страни

г) 7 страни.

3. Препиши ја и дополни ја табелата за правилни многуаголници. Некои агли се веќе запишани.

Број на страни	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20
Надворешен агол	120°									24°	
Внатрешен агол										156°	

4. Користи ја табелата од задача **3** за да одговориш на следните прашања:

а) Што се случува со надворешниот агол кога се зголемува бројот на страни на многуаголникот?

б) Што се случува со внатрешниот агол кога се зголемува бројот на страни на многуаголникот?

в) Пресметај го внатрешниот агол на правилен многуаголник со 100 страни за да го провериш твојот одговор под **б)**.

5. На дадените цртежи е прикажано теме на правилен многуаголник.

Пресметај колку страни има секој од нив.

а)



б)



Прво пресметај го надворешниот агол.

6. Има две формули за пресметување внатрешниот агол x на правилен многуаголник.

Едната од нив е $x° = \frac{180°(n-2)}{n}$.

Ослободи се од заградата и упрости ја равенката.

Покажи дека таа е еквивалентна со равенката $x° = 180° - \frac{360°}{n}$.

По ослободувањето од загради изразот запиши го со две дропки.

Агли и прави

Кога две прави се сечат, се формираат четири агли.

Тие агли, два по два се еднакви меѓу себе.

Нив ги нарекуваме **накрсни** агли.

На цртежите се прикажани двата пара накрсни агли.



Накрсните агли се еднакви меѓу себе.

Кога една права сече две паралелни прави, постојат два пресека или пресечни точки. Правата што ги сече двете паралелни прави ја нарекуваме трансверзала.

Согласни агли се аглите што се наоѓаат на иста страна на трансверзалата и тоа, едниот е внатрешен, а другиот е надворешен.

На цртежите се прикажани некои парови согласни агли.



Согласните агли се еднакви меѓу себе.

Наизменични агли се наоѓаат на различни страни од трансверзалата и двата се надворешни или двата се внатрешни агли.

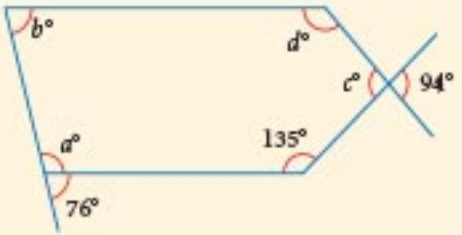
На цртежите се прикажани некои парови наизменични агли.



Наизменичните агли се еднакви меѓу себе.

Во решавањето на задачите секогаш треба да наведеме зошто некои агли се еднакви.

Пример 6



Пресметај ја големината на аглите означени со букви на цртежот.

Хоризонталните страни се паралелни.

Објасни ги твоите решенија.

$a° = 180° - 76°$

$= 104°$ Збирот на агли што формираат права е 180°.

$b° = 76°$ Согласни агли.

$c° = 94°$ Накрсни агли.

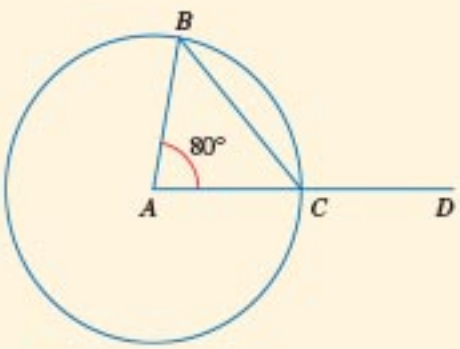
Да запомниме дека кога две прави се сечат, тогаш има два пара накрсни агли. Накрсните агли се еднакви.

$d° = 540° - (104° + 76° + 135° + 94°)$

$= 540° - 409°$

$= 131°$ Збирот на внатрешните агли во петаголник е 540°.

Пример 7



Точката A е центар на кружницата.

Точките B и C се точки на кружницата.

ACD е права.

$\sphericalangle BAC = 80°$

а) Пресметај го $\sphericalangle ABC$.

б) Пресметај го $\sphericalangle BCD$.

Објасни ги добиените решенија.

а) $\overline{AB} = \overline{AC}$ Двете отсечки се радиуси на кружницата.

Триаголникот ABC е рамнокрак триаголник.

$\sphericalangle ABC = (180° - 80°) : 2$ Збирот на аглите во рамнокрак триаголник е 180°.

$= 50°$

б) $\sphericalangle ACB = 50°$

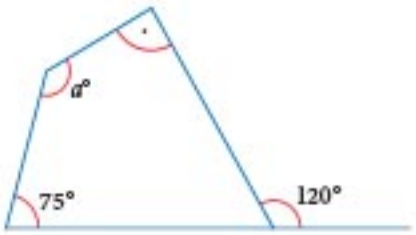
$\sphericalangle BCD = 180° - 50°$ Збирот на агли што формираат права е 180°.

$= 130°$

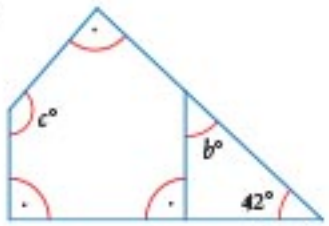
Задачи

1. Пресметај ги аглите на цртежите означени со букви.

а)

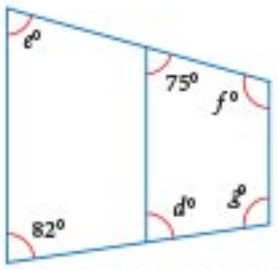


б)



Вертикалните страни се паралелни.

в)



Вертикалните страни се паралелни.

2. ABC е триаголник.

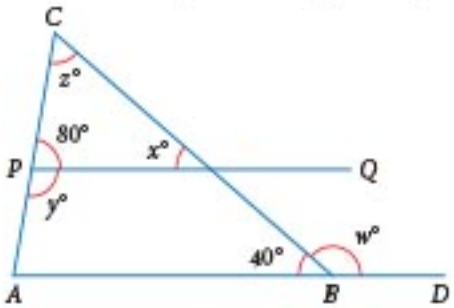
PQ е права паралелна на AB.

$\sphericalangle ABC = 40°$

$\sphericalangle CPQ = 80°$

Пресметај ги аглите $w°$, $x°$, $y°$ и $z°$.

Објасни ги твоите решенија.



3. $ABCDE$ е петаголник.

AM е оска на симетрија.

$\sphericalangle ABC = 85°$

$\sphericalangle CDE = 130°$

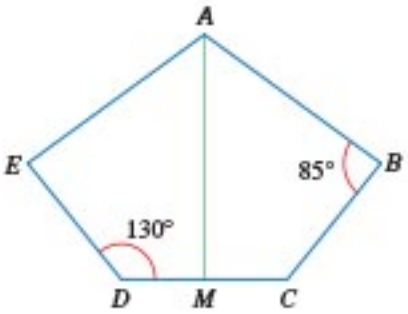
Пресметај го:

а) $\sphericalangle AED$

б) $\sphericalangle BCD$

в) $\sphericalangle BAE$

г) $\sphericalangle AMC$.



4. $ABCDEF$ е правилен шестаголник.

а) Пресметај го $\sphericalangle ABC$.

Нацртана е дијагоналата од A до C.

б) Од кој вид е триаголникот ABC?

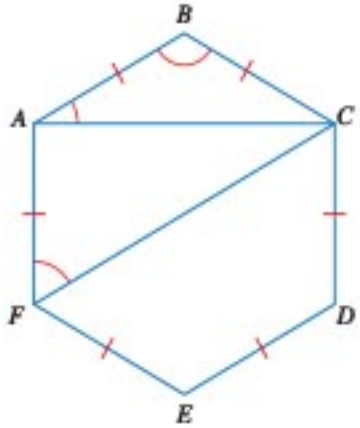
в) Пресметај го $\sphericalangle BAC$.

г) Пресметај го $\sphericalangle CAF$.

Друга дијагонала е нацртана од C до F.

д) Пресметај го $\sphericalangle AFC$.

ѓ) Од кој вид е триаголникот ACF?

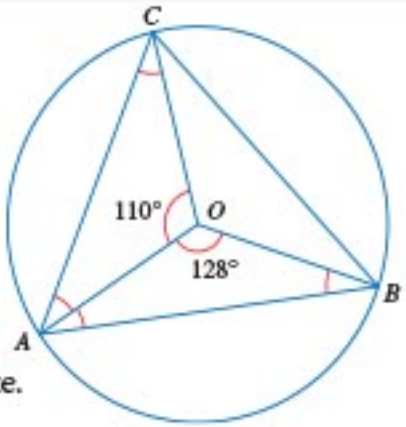


5. На цртежот е прикажана кружница со центар во O.

ABC е триаголник чии темиња A, B и C лежат на кружницата.

$\sphericalangle AOB = 128°$

$\sphericalangle AOC = 110°$



а) Пресметај го аголот BOC. Објасни го добиеното решение.

б) Пресметај го аголот OCA. Објасни го добиеното решение.

в) Пресметај го аголот OCB. Објасни го добиеното решение.

г) Пресметај го аголот ACB.

д) Покажи дека аголот AOB е двапати поголем од аголот ACB.

O е центар на кружницата, па $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$. Користи својства на рамнокраки триаголници.

Оваа задача е пример за едно општо правило: Аголот со теме на кружницата е двапати помал од аголот со теме во нејзиниот центар над ист кружен лак.

8.5 Правилни мозаици

Математика во дизајн



На сликата е прикажан дел од ѕид на кралската палата Алказар во Севилја, Шпанија, оригинално дизајнирана од маварските кралеви. Оваа стара кралска палата сега е дел од светското наследство на УНЕСКО.

Во неа има убави примери за тоа како исламските градежници и архитекти користеле математички форми за да конструираат мозаици.

Во Македонија постојат зачувани остатоци од прекрасни мозаици во археолошкиот локалитет Хераклеја во близина на Битола.

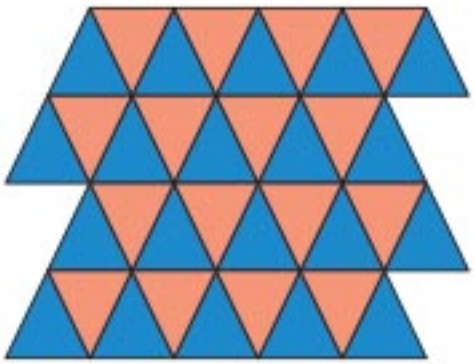




Тесалација или поплочување е постапка на покривање рамна површина со една или со комбинирање повеќе 2Д-форми без преклопување и без празнини помеѓу нив.

Тесалација можеме да направиме и од правилни многуаголници.

На сликата е прикажана тесалација направена од рамностран триаголници.



Рамностраниот триаголник е **правилен многуаголник**.

Еден многуаголник е правилен ако сите негови страни се еднакви меѓу себе и сите негови агли се еднакви меѓу себе.

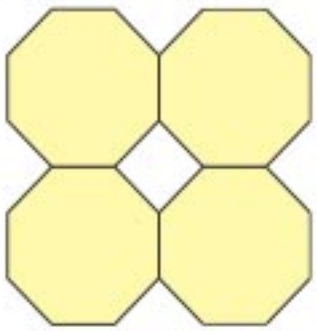
Тесалацијата добиена со комбинирање на еден вид правилен многуаголник ја нарекуваме **правилна тесалација**.

Секој внатрешен агол во рамностран триаголник е 60°.

Во секое теме на мозаикот се „среќаваат“ шест агли.

Знаеме дека е мозаик бидејќи $6 \cdot 60° = 360°$, односно големината на внатрешниот агол е делител на 360°.

На цртежот се прикажани неколку правилни осумаголници.



Ако наредиме четири правилни осумаголници забележуваме дека меѓу нив се појавува празнина во форма на квадрат.

Тоа значи дека само од правилни осумаголници не можеме да направиме мозаик.

Да ги провериме внатрешните агли.

Секој внатрешен агол на правилниот осумаголник е 135°.

$135° \cdot 2 = 270°$ и $135° \cdot 3 = 405°$, па 135° не е делител на 360°.

Заклучуваме дека не е можно да се постават агли од 135° со заедничко теме во една точка без да се појави празнина.

Пример

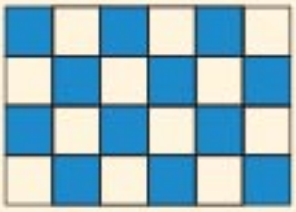
а) Формирај тесалација од правилни четириаголници.

б) Одреди ја големината внатрешниот агол на правилниот четириаголник и објасни зошто е можен мозаикот под **а)**.

а) Правилниот четириаголник има четири еднакви страни и четири еднакви агли.

Тоа е квадрат.

На цртежот десно е прикажана тесалација од квадрати.



б) Внатрешниот агол на квадрат е 90°.

90° е делител на 360° бидејќи $4 \cdot 90° = 360°$.

Има четири агли по 90° што се „среќаваат“ во секое внатрешно теме на мозаикот.

Задачи

1. **а)** Пресметај го внатрешниот агол на правилен шестаголник.

б) Покажи дека 120° е делител на 360°.

Погледни во тема 3 ако ти е потребно потсетување.

в) Нацртај тесалација користејќи правилни шестаголници.

2. Претходно учевме за пресметување внатрешен агол на неколку правилни многуаголници.

Во табелата се прикажани внатрешните агли на неколку правилни многуаголници.

Број на страни	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20
Внатрешен агол	60°	90°	108°	120°	126.6°	135°	140°	144°	150°	156°	162°

Покажавме дека внатрешните агли на правилните многуаголници со 3, 4 и 6 страни се делители на 360°.

а) Провери дали уште некој од внатрешните агли во табелата се делители на 360°.

Делител на 360 е бројот со кој 360 се дели без остаток.

б) Покажи дека постојат само три правилни мозаици.

3. 2Д-формата во форма на буквата L е формирана од четири квадрати.



Нацртај две различни тесалации од оваа 2Д-форма.

Користи тетратка со квадратчиња за полесно цртање мозаици.

4. Знаеме дека со 2 правилни осумаголника и 1 квадрат можеме да направиме тесалација.

Тесалација во која се користат два или повеќе различни правилни многуаголници ја нарекуваме **полуправилна тесалација**.

а) Собери ги внатрешните агли на два осумаголници и еден квадрат.

Покажи дека нивниот збир е 360°.

б) Собери ги внатрешните агли на два шестаголници и два рамностранти триаголници.

Покажи дека нивниот збир е 360°.

в) Нацртај полуправилен мозаик со два шестаголници и два триаголници во секое внатрешно теме.

г) Провери дали можеш да најдеш друга комбинација од внатрешни агли чиј збир е 360°.

Најди друга полуправилна тесалација.

Постојат вкупно 8 такви комбинации, но некои од нив се потешки за цртање.

8.6 Мапи и азимут

Азимут

Историски гледано, патниците најчесто се ориентирале користејќи **компас**.





На цртежот се прикажани главните осум насоки на компасот.

Со нивно комбинирање се добиваат многу насоки што се користат со компасот.

За современите патувања овој начин на ориентација не е е доволно прецизен.

Насоките денес се дефинираат преку азимут.

Азимут е агол измерен од север во насока на движење на стрелките на часовникот.

Азимут обично се запишува со три цифри. Азимут од 45° се запишува како 045°.

Следниот пример покажува како да мериме азимут со агломер.

Пример 1

Нека A, B и C се три точки на мапата.

а) Измери го азимутот од A до B. **б)** Измери го азимутот од A до C.







а) Цртаме права од A до B.

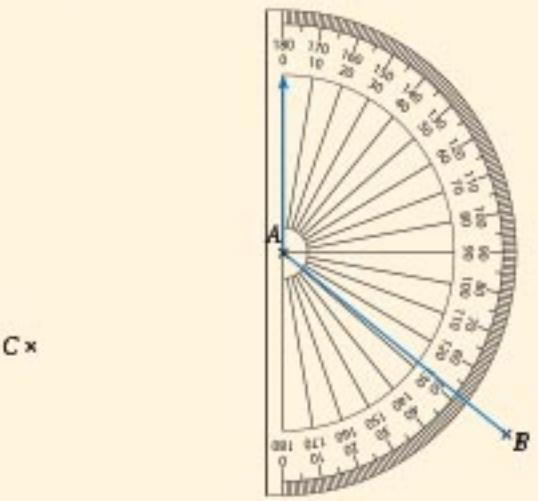
Го поставуваме аголмерот со ознаката 0° во насока северно од A.

Центарот на аголмерот треба да биде поставен во точката A.

Внатрешна скала е онаа што започнува со нула на северната права.

Го читаме аголот до B.

Азимут е 128°.

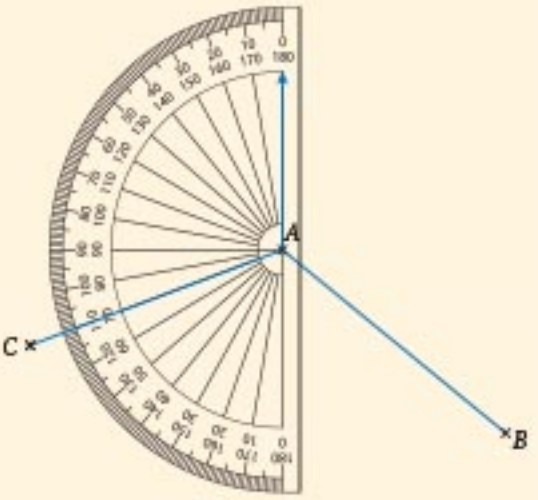


б) Цртаме права од A до C.

Аголмерот поставен како под **а)** не можеме да го користиме.

За да најдеме азимут на C, аголмерот го поставуваме на другата страна на северната права.

Постојат два начина за наоѓање на азимут.



Прв начин: Читаме од југ (од јужната права со почеток во 0°), во насока на движење на стрелките на часовникот, до правата AC.

Добивме агол од 70°.

Аголот од северната до јужната права е 180°.

Азимут од A до C е $180° + 70° = 250°$.

Втор начин: Читаме од север (од северната права со почеток во 0°) во насока спротивна од насоката на движење на стрелките на часовникот, до точката C.

Добивме агол од 110°.

Азимут од A до C е $360° - 110° = 250°$.

Размер на мапи

Објектите и површините на мапите често се претставени во размер.

Размерот 1 : 200000 на мапата значи дека 1 сантиметар на мапата претставува 200000 сантиметри на Земјата.

1 cm : 200000 cm

1 cm : 2000 m Делиме со 100 бидејќи во 1 метар има 100 сантиметри.

1 cm : 2 km Делиме со 1000 бидејќи во 1 km има 1000 m.

Размерот 1 : 200000 е ист со размерот во кој со 1 cm се претставени 2 km.

Пример 2

Размерот на мапата е 1 : 250000.

Патот на мапата е долг 6 cm.

Колкава е должината на вистинскиот пат?

1 cm : 250000 cm

1 cm : 2500 m

1 cm : 2,5 km

Секој сантиметар на мапата претставува 2,5 km.

Растојанието од 6 cm на мапата претставува $6 \cdot 2{,}5 = 15$ km.

Пример 3

На дадената мапа е прикажан остров со град, пристаниште и светилник.



Размерот на мапата е 1 : 500000.

Пресметај:

а) растојанието помеѓу градот и пристаништето.

б) азимут од светилникот до пристаништето.

а) Размерот на мапата е 1 : 500000.

1 cm : 500000 cm

1 cm : 5000 m

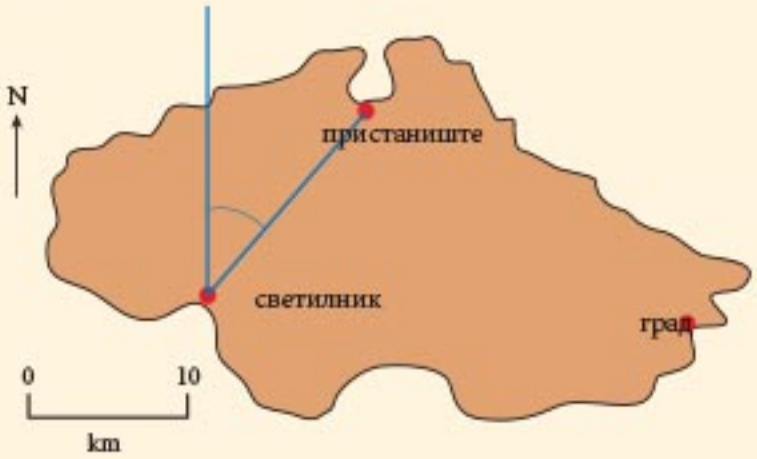
1 cm : 5 km

Секој сантиметар на мапата претставува 5 km.

Растојанието на мапата помеѓу градот и пристаништето е 4,8 cm.

Вистинското растојание е $4{,}8 \cdot 5 = 24$ km.

б) Цртаме северна права во светилникот и цртаме права помеѓу светилникот и пристаништето.



Го мериме аголот означен помеѓу двете прави.

Азимут е 042°.

Задачи

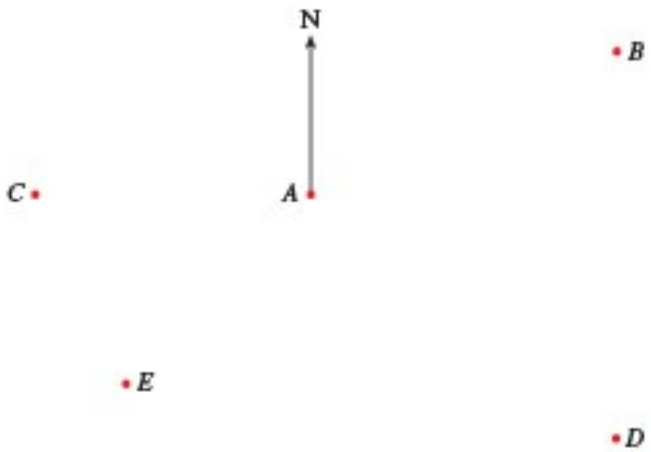
1. Дадени се размери на мапи. Пресметај што претставува 1 cm во секој размер.

а) 1 : 500000 **б)** 1 : 2000 **в)** 1 : 50000 **г)** 1 : 40000000 **д)** 1 : 25000000

2. Запиши ги следните размери на мапи:

а) 1 cm претставува 1 km **б)** 1 cm претставува 50 km **в)** 1 cm претставува 250 m

3. На цртежот се прикажани пет места означени со A, B, C, D и E.



Измери азимут:

а) од A до B **б)** од A до C **в)** од D до A **г)** од C до E

4. Користи ја мапата од задача **3** за да одговориш на следниве прашања:

а) Која точка се наоѓа северно од D?

б) Која точка се наоѓа југозападно од A?

в) Каква е насоката од C до A?

5. На мапата се прикажани четири града.

Размерот на мапата е 1 : 200000.



а) Пресметај колку километри се претставени со 1 cm на мапата.

б) Одреди го растојанието меѓу Охрид и Штип во километри.

в) Пресметај азимут од Штип до Охрид.

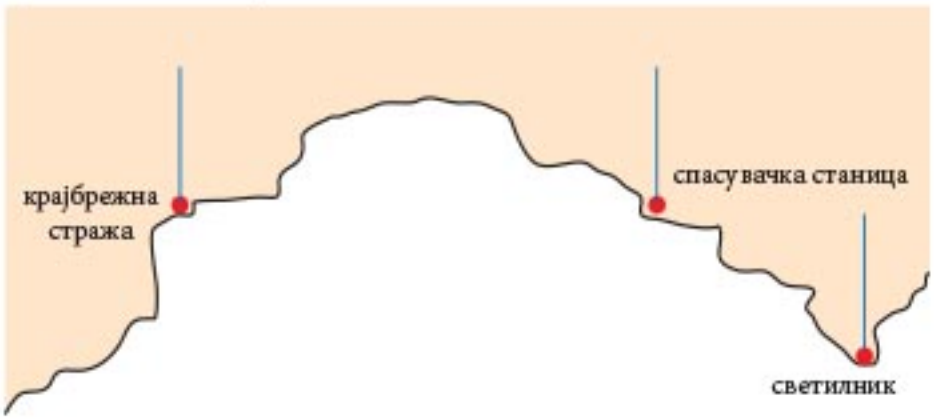
Пилотот на хеликоптерот треба да лета од Дебар до Струмица.

г) Пресметај азимут на Струмица од Дебар.

д) Одреди го растојанието од Дебар до Струмица во километри.

6. Дадената мапа прикажува дел од брег.

Прецртај ја мапата во тетратка.



размер 1 : 20 km

Еден брод во неволја испратил сигнал за опасност што е примен од светилникот и од крајбрежната стража.

а) Бродот се наоѓа на азимут од 135° од крајбрежната стража.

Нацртај права на мапата за да прикажеш азимут од 135° од крајбрежната стража.

б) Бродот е на азимут од 260° од светилникот.

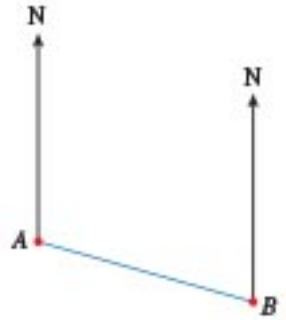
Нацртај права на мапата за да прикажеш азимут од 260° од светилникот.

в) Местото каде што се сечат правите ја прикажува положбата (позицијата) на бродот.

Одреди го растојанието од бродот до спасувачката станица.

г) Колкав азимут има од спасувачката станица до бродот?

7. На цртежот се прикажани две точки A и *B*, заедно со северните прави.



а) Пресметај азимут на *B* од A.

б) Без мерење на аголот кај *B*, пресметај азимут на *A* од *B*.

Ова е познато како обратен азимут.

Двете северни прави се паралелни. Користи го твоето знаење за паралелни прави за да пресметаш азимут.

Азимут и обратниот азимут секогаш се разликуваат за 180°.

Ако еден азимут е помал од 180°, тогаш додај 180° за да го најдеш обратниот азимут.

в) Пресметај го обратниот азимут за дадените азимути:

i 065° **ii** 154° **iii** 217° **iv** 300° **v** 270°

8.7 Питагорова теорема

Питагора бил грчки математичар кој живеел пред околу 2500 години.

Тој ги изучувал правоаголните триаголници.

И пред неговото време било познато дека секој триаголник чии страни имаат размер 3 : 4 : 5 е правоаголен триаголник.

Вавилонците, Кинезите и Египќаните користеле триаголници со страни 3, 4 и 5 мерни единици за да бидат сигурни дека аглите на нивните објекти се прави агли.



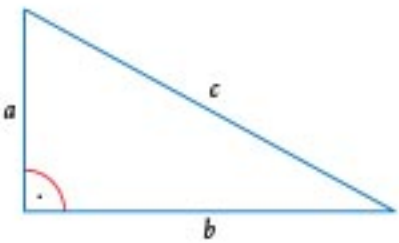
Теоремата што го носи името на Питагора е една од најпознатите теореми во математиката.

Таа се однесува на правоаголните триаголници.

Ги означуваме страните *a*, *b* и *c* на правоаголниот триаголник.

Страната *c* е **хипотенуза** и таа е најдолгата страна на триаголникот.

Хипотенуза е страната спроти правиот агол.



Питагоровата теорема гласи:

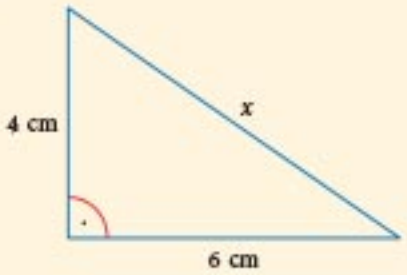
$$a^2 + b^2 = c^2$$

или со зборови: „Квадратот на хипотенузата е еднаков со збирот на квадратите на другите две страни“.

Формулата може да се примени само ако трите страни се дадени во исти мерни единици.

Пример 1

Пресметај ја должината на страната x.



Прво проверуваме која страна е хипотенузата.

Страната x е хипотенуза. Двете пократки страни се долги 4 cm и 6 cm.

Ја применуваме Питагоровата теорема:

$a^2 + b^2 = x^2$	Ја запишуваме Питагоровата теорема за триаголникот.
$4^2 + 6^2 = x^2$	Ги заменуваме a и b со вредностите 4 и 6.
$16 + 36 = x^2$	Пресметуваме 4^2 и 6^2.
$52 = x^2$	
$x = \sqrt{52}$	Коренувањето е инверзна операција на квадрирањето.
$x = 7{,}21$ cm (на 2 д.м.)	Решението го запишуваме со степен на точност.

Пример 2

Пресметај ја должината на страната h.

Решението ќе го заокружиме на 1 децимално место.



Хипотенузата е 11 cm, а останатите две страни се 6 cm и h.

Ја применуваме Питагоровата теорема:

$a^2 + b^2 = c^2$	Ја запишуваме Питагоровата теорема за триаголникот.
$6^2 + h^2 = 11^2$	Ги заменуваме a и c со вредностите 6 и 11.
$h^2 = 11^2 - 6^2$	Одземаме 6^2 од двете страни.
$h^2 = 121 - 36$	Пресметуваме 11^2 и 6^2.
$h^2 = 85$	
$h = \sqrt{85}$	
$h = 9{,}2$ (на 1 д.м.)	Заокружуваме на 1 децимално место.

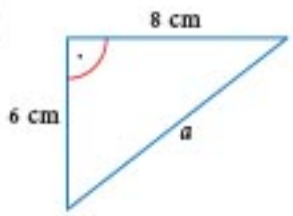
На крајот го разгледуваме добиеното решение и потоа го проверуваме. Во овој случај, 9,2 е помало од 11, па тоа решение е добро решение.

Задачи

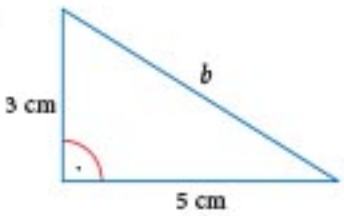
Каде што е неопходно, заокружи го решението на 3 значајни цифри, ако не е поинаку наведено во задачите.

1. Пресметај ги должините на страните означени со букви.

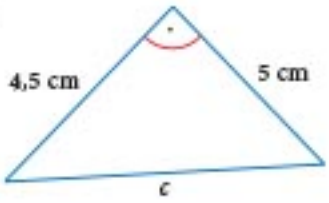
а)



б)

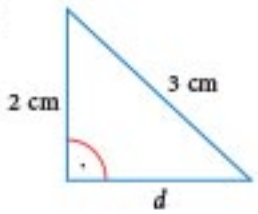


в)

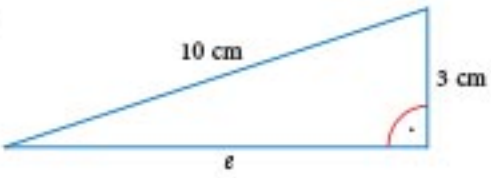


2. Пресметај ги должините на страните означени со букви.

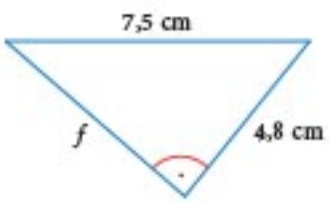
а)



б)

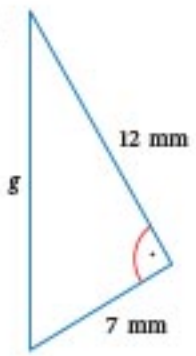


в)

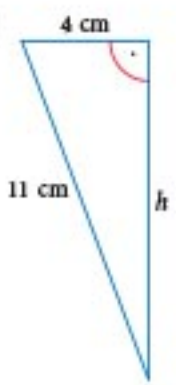


3. Пресметај ги должините на страните означени со букви.

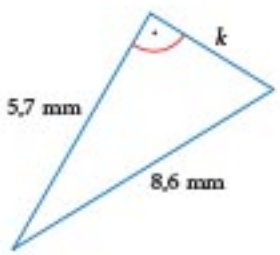
а)



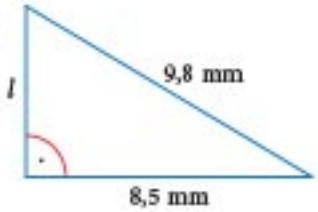
б)



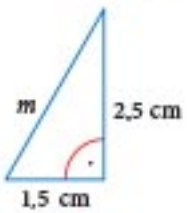
в)



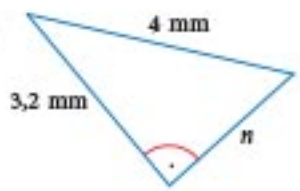
г)



д)



ѓ)

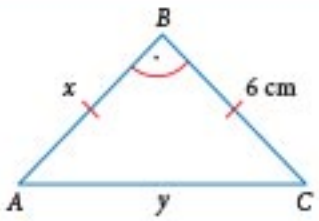


4. ABC е рамнокрак правоаголен триаголник.

$\overline{BC} = 6$ cm

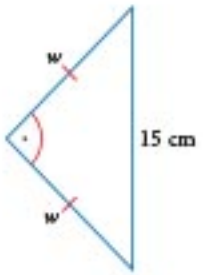
а) Пресметај ја должината на страната означена со x.

б) Пресметај ја должината на страната означена со y.



5. На цртежот е прикажан правоаголен рамнокрак триаголник.

Пресметај ја должината на страната означена со w.



Прво запиши равенка во која w се појавува како променлива.

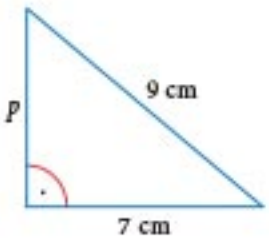
6. Лука со Питагорова теорема се обидел да ја најде должината означена со p во даденият триаголник.

$7^2 + 9^2 = p^2$

$49 + 81 = p^2$

$130 = p^2$

$p = \sqrt{130} = 11{,}4$ cm (на 1 д.м.)



а) Зошто веднаш можеш да кажеш дека ова решение е погрешно.

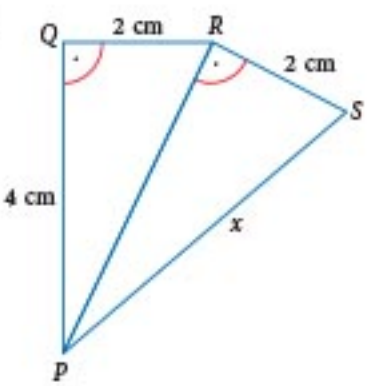
б) Пресметај го точното решение.

Разгледај ги должините на страните. Дали ова решение е добро решение?

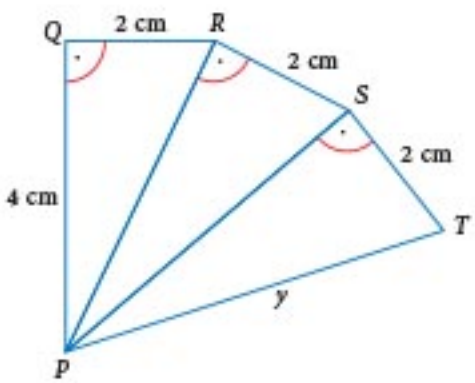
7. Спиралите можат да се формираат со надоврзување на низа од правоаголни триаголници.

Пресметај ги должините на страните означени со x и y на цртежите.

а)



б)



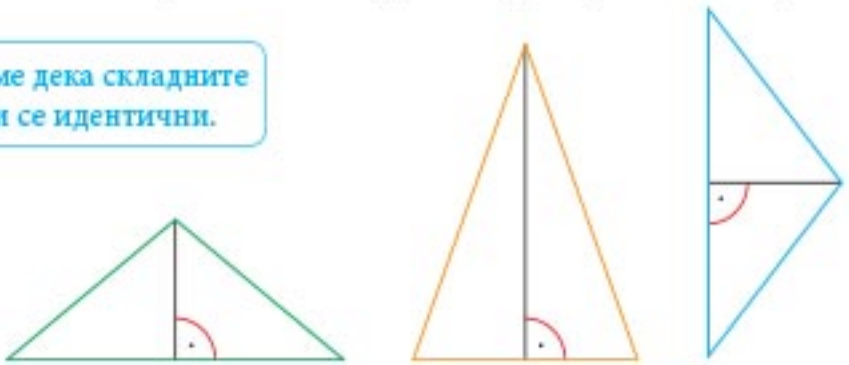
Прво треба да ја пресметаш третата страна на првиот триаголник одлево.

8.8 Примена на Питагорова теорема

Рамнокраки триаголници

Рамнокрак триаголник може да составиме од два складни правоаголни триаголници.

Да запомниме дека складните триаголници се идентични.



На тој начин можеме да ја примениме Питагоровата теорема кај рамнокраките триаголници.

Пример 1

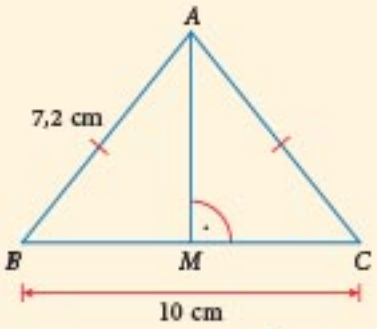
ABC е рамнокрак триаголник со $\overline{AB} = \overline{AC}$.

$\overline{AM}$ е нормална на $\overline{BC}$.

$\overline{AB} = 7{,}2$ cm и $\overline{BC} = 10$ cm.

а) Пресметај ја должината на $\overline{AM}$.

б) Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC.



Решението заокружи го на три значајни цифри.

а) Да го скицираме еден од правоаголните триаголници.

На пример, триаголникот ABM.

$\overline{BM} = 5$ cm бидејќи неговата должина е половина од должината на основата $\overline{BC}$.

Хипотенузата на триаголникот е 7,2 cm.

Нека $\overline{AM} = x$.

Ја применуваме Питагоровата теорема:

$5^2 + x^2 = 7{,}2^2$

$x^2 = 7{,}2^2 - 5^2$

$x^2 = 26{,}84$

$x = \sqrt{26{,}84} = 5{,}18$ cm (на 3 з.ц.)

Должината на $\overline{AM} = 5{,}18$ cm (на 3 з.ц.)



Под **б)** не ја користи вредноста на решението под **а)** заокружена на 3 значајни цифри. Користи барем 4 значајни цифри во пресметките за да не се намали точноста.

Ако на твојот калкулатор има копче Ans, тогаш можеш да помножиш $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot$ Ans.

б) Плоштина на триаголникот $= \frac{1}{2} \cdot$ основа $\cdot$ висина

Плоштината на триаголникот $ABC = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5{,}1807\ldots$

$= 25{,}9$ cm^2 (на 3 з.ц.)

Практична примена на Питагорова теорема

Постојат многу задачи што можат да се решат со примена на Питагоровата теорема.

На пример, скалата поставена на хоризонтална подлога и потпрена на вертикален ѕид формира правоаголен триаголник заедно со ѕидот и хоризонталната подлога.



Кога решаваме задачи, треба да нацртаме соодветен цртеж за да видиме како се поставени зададените елементи и како е формиран правоаголниот триаголник.

Решението треба да го прикажеме со одреден степен на точност.

Пример 2

Скалата е поставена на хоризонтална подлога и со горниот дел е потпрена на вертикален ѕид.

Скалата е долга 5 метри.

Основата на скалата е оддалечена 2,2 метра од ѕидот.

Која висина ја достига горниот дел од скалата што е потпрен на ѕидот.

Прво ќе нацртаме цртеж за да видиме како се поставени потребните елементи.

На цртежот е прикажан правоаголен триаголник.

Хипотенузата е долга 5 метри.



Со Питагоровата теорема:

$2{,}2^2 + h^2 = 5^2$

$h^2 = 5^2 - 2{,}2^2$ Одземаме $2{,}2^2$ на двете страни.

$h^2 = 20{,}16$

$h = \sqrt{20{,}16} = 4{,}49$ m (на 2 д.м.) Заокружуваме на 2 децимални места.

Скалата достигнува висина од 4,49 метри.

Пример 3

Еден хеликоптер летнал од аеродром и се движел 120 km на север.

Потоа летал 45 километри на исток.

Колку е оддалечен хеликоптерот од аеродромот?

Прво ќе нацртаме цртеж за да видиме како се поставени елементите.

Ја означуваме третата страна x на триаголникот.

На цртежот е прикажан правоаголен триаголник со хипотенуза x.

Ја применуваме Питагоровата теорема:

$45^2 + 120^2 = x^2$

$16425 = x^2$

$x = \sqrt{16425} = 128{,}2$ km (на 1 д.м.) Заокружи на 1 д.м.



Хеликоптерот сега е оддалечен 128,2 километри од аеродромот.

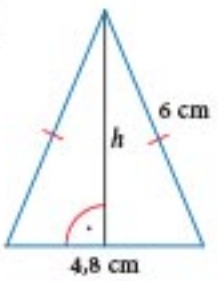
Задачи

За задачите од **1** до **3** заокружи го решението на 3 значајни цифри каде што е неопходно.

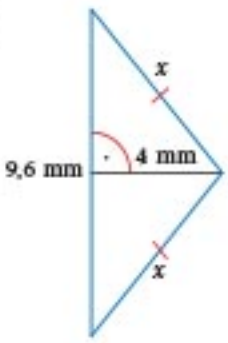
За задачите од **4** до **10** одреди степен на точност, ако не е дадено во задачата.

1. Пресметај ги должините на отсечките означени со букви кај следните рамнокраки триаголници.

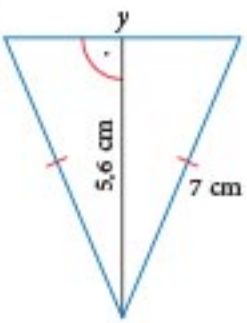
а)



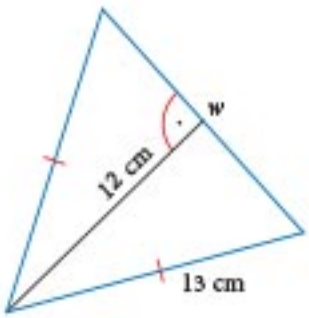
б)



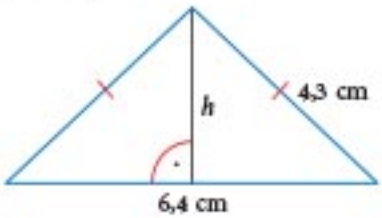
в)



г)



2. На цртежот е даден рамнокрак триаголник.

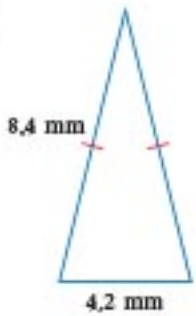


а) Пресметај ја висината h.

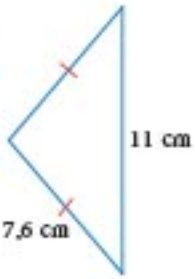
б) Пресметај ја плоштината на триаголникот.

3. Пресметај ја плоштината на секој од рамнокраките триаголници.

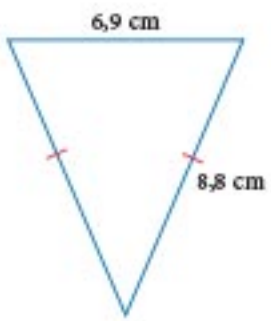
а)



б)



в)



4. Бродот плови 60 километри на југ и потоа 48 километри на запад.

Колкаво е растојанието на бродот од почетната точка?

5. Скалата е поставена на хоризонтална подлога и со горниот дел е потпрена на вертикален ѕид.

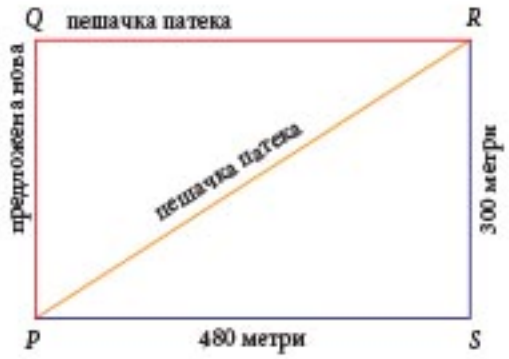
Скалата е долга 6 метри.

Горниот дел од скалата, што е потпрен на ѕидот, достигнува висина од 5,35 метри на вертикалниот ѕид.

Колку е оддалечена основата на скалата од ѕидот?

Решението заокружи го на најблискиот сантиметар.

6. Дадена е скица на една нива.



Постои пешачка патека која поминува дијагонално низ нивата од P до R.

а) Пресметај ја должината на дијагоналната пешачка патека.

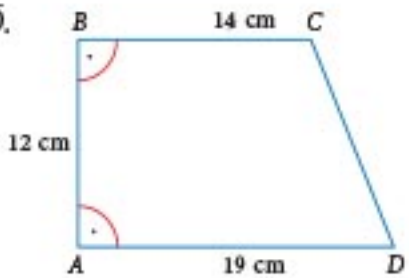
Сопственикот на нивата сака да ја премести пешачката патека по работ на нивата од P преку Q до R.

б) Колку ќе биде подолга планираната нова патека во однос на дијагоналната патека.

7. На цртежот е прикажан трапез $ABCD$. $\overline{BC}$ е паралелна со $\overline{AD}$.

$\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC = 90°$.

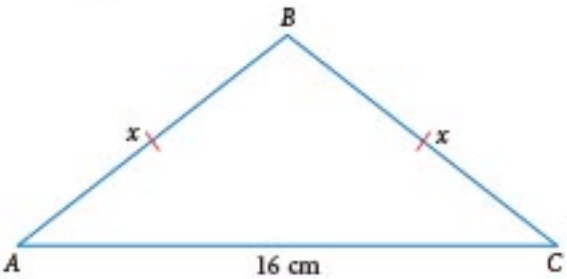
Пресметај ја должината на $\overline{CD}$.



Нацртај нормална отсечка од C до $\overline{AD}$ за да добиеш правоаголен триаголник.

8. На цртежот е прикажан рамнокрак триаголник.

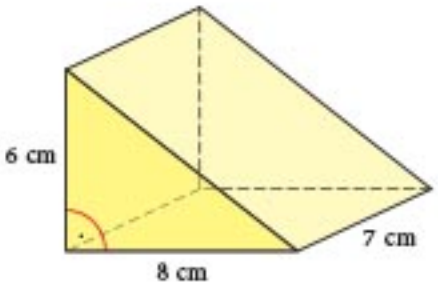
Плоштината на триаголникот е 72 cm².



Пресметај ја должината на страната означена со x.

Прво пресметај ја висината.

9. Пресметај ја плоштината на призмата.



Пресметај ја плоштината на триаголникот со формулата
плоштина $= \frac{1}{2} \cdot$ основа $\cdot$ висина

10. На цртежот се прикажани правоаголен триаголник и по една полукружница на секоја негова страна.

а) Пресметај ја должината на хипотенузата a.

б) Пресметај ја плоштината на полукругот C.

Решението заокружи го на три децимални места.

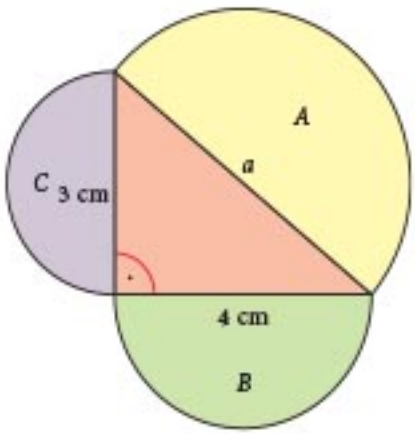
в) Пресметај ја плоштината на полукругот B.

Решението заокружи го на три децимални места.

г) Пресметај ја плоштината на полукругот A.

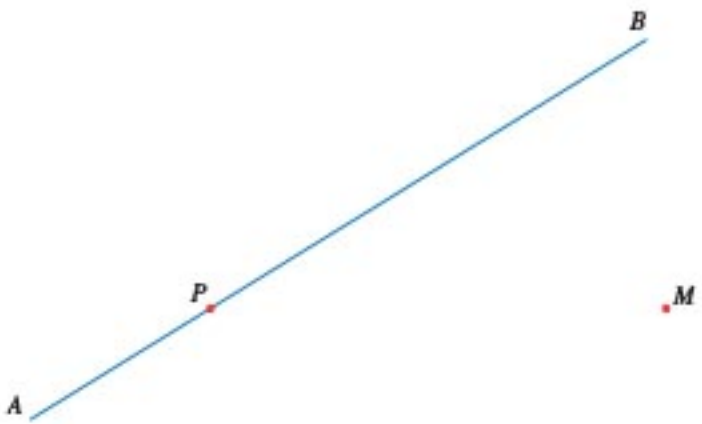
Решението заокружи го на три децимални места.

д) Собери ги плоштините на двата помали полукруга. Што забележуваш?



Задачи за повторување

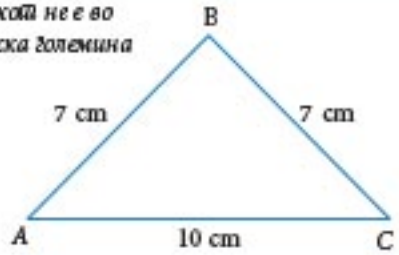
1. Нацртај го цртежот во тетратка.



а) Нацртај нормала на AB што минува низ точката P.

б) Низ точката M нацртај права што со нормалата на AB зафаќа агол од 90°.

2. **а)** Конструирај триаголник ABC каков што е прикажан на цртежот.



б) Нацртај права од B што ја сече $\overline{AC}$ под прав агол.

в) Измери ја висината на триаголникот.

г) Пресметај ја плоштината на триаголникот.

3. На цртежот е прикажана триаголна градина ABC.

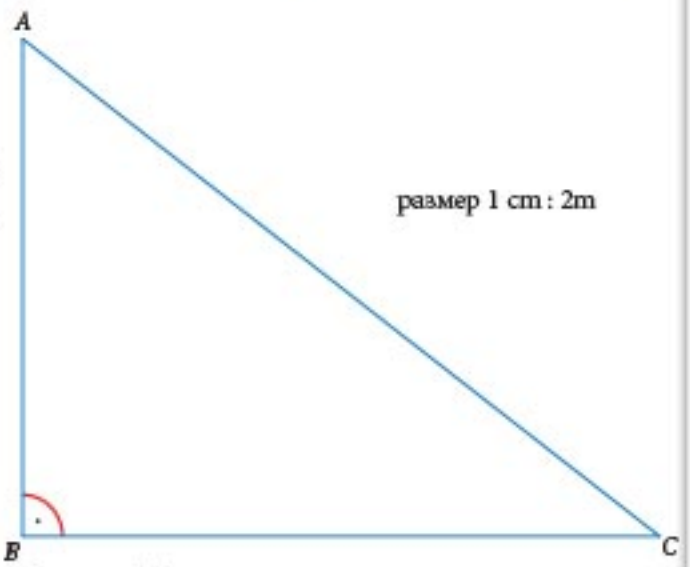
Нацртана е во размер 1 cm : 2m

а) Прецртај го цртежот во тетратка.

Треба да се насади дрво оддалечено 8 метри од A и 6 метри од $\overline{BC}$.

б) Нацртај геометриско место на точки што се оддалечени 8 метри од A.

в) Нацртај геометриско место на точки што се оддалечени 6 метри од ѕидот $\overline{BC}$.



г) Означи ја положбата на дрвото со буквата T.

4. **а)** Нацртај петаголник.

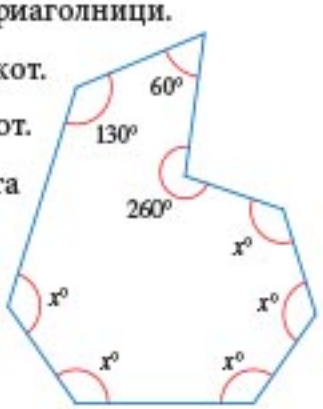
б) Нацртај дијагонали за да го поделиш петаголникот на триаголници.

в) Пресметај го збирот на внатрешните агли на петаголникот.

5. **а)** Запиши го математичкото име на 2Д-формата на цртежот.

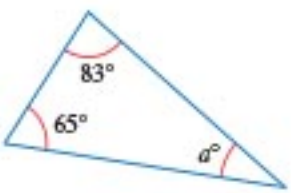
б) Пресметај го збирот на внатрешните агли на 2Д-формата на цртежот.

в) Користи го резултатот под **б)** за да ја пресметаш големината на аголот $x°$.

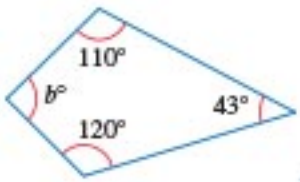


6. Според податоците на цртежите, пресметај ја големината на аглите означени со букви.

а)



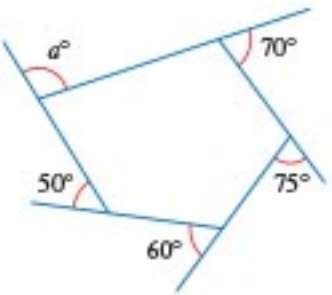
б)



7. **а)** Препиши го и дополни го тврдењето:

Збирот на надворешните агли во многуаголник е _____.

б) Пресметај ја големината на аголот $a°$ според податоците на цртежот.



8. Дадени се четири многуаголници.

А 

Б 

В 

Г 

Препиши и дополни со буквите од многуаголниците за да бидат точни тврдењата:

а) _____ и _____ се петаголници.

б) _____ и _____ се неконвексни многуаголници.

в) _____ и _____ се правилни многуаголници.

г) _____ и _____ се шестаголници.

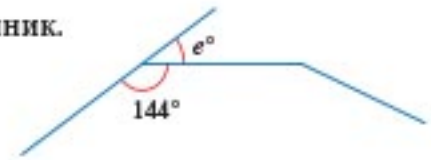
9. Запиши го математичкото име за правилен четириаголник.

10. Пресметај ја големината на надворешниот агол на многуаголник со:

а) 6 страни **б)** 9 страни **в)** 12 страни **г)** 24 страни.

11. Пресметај ја големината на внатрешниот агол на многуаголниците од претходната задача.

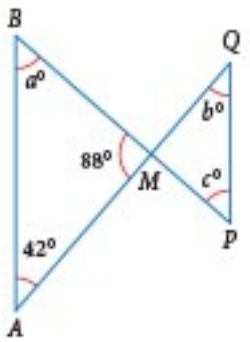
12. На цртежот е прикажан дел од правилен многуаголник.



а) Пресметај ја големината на аголот $e°$.

б) Колку страни има целиот многуаголник?

13. На цртежот $\overline{AB}$ е паралелна на $\overline{PQ}$.



Пресметај ја големината на:

а) $\sphericalangle ABM$

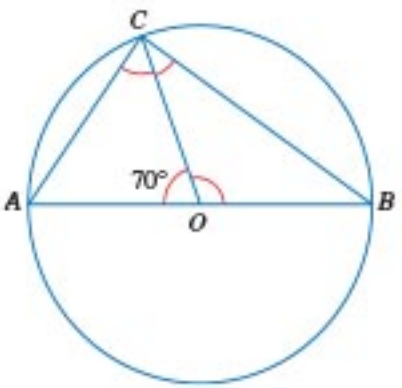
б) $\sphericalangle PQM$

в) $\sphericalangle MPQ$.

14. A, B и C се точки на кружницата.

O е центар на кружницата.

$\sphericalangle AOC = 70°$



а) Од кој вид е триаголникот AOC?

б) Пресметај ја големината на $\sphericalangle ACO$.

в) Одреди ја големината на $\sphericalangle COB$.

г) Одреди ја големината на $\sphericalangle BCO$.

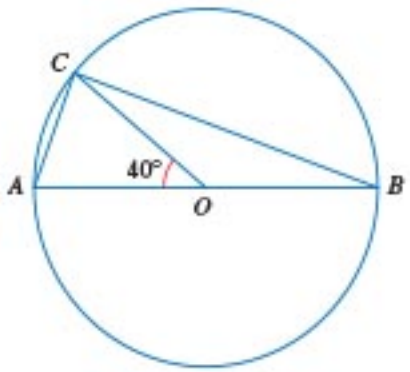
д) Одреди ја големината на $\sphericalangle ACB$.

15. На цртежот е прикажана кружница како онаа од претходната задача.

Во овој случај $\sphericalangle AOC = 40°$

Користејќи го овој цртеж, повторно одговори на барањата од **а)** до **д)** од претходната задача.

Што забележуваш за $\sphericalangle ACB$ во овој случај?



Оваа задача е пример за едно општо правило:

Ако триаголникот ABC има темиња на една кружница и $\overline{AB}$ е дијаметар на кружницата, тогаш аголот ACB е прав агол.

16. Пресметај го внатрешниот агол на правилен десетаголник.

Објасни зошто не е можно да се нацрта правилен мозаик од десетаголник.

17. **а)** Нацртај кружница со радиус 5 cm.

б) Конструирај правилен осумаголник впишан во кружницата.

18. Користи линијар и шестар за да ја конструираш дадената 2Д-форма.



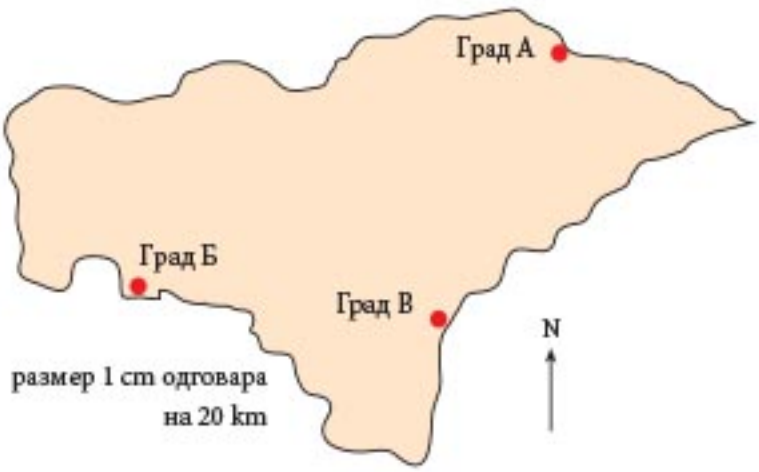
19. Запиши ги во форма на размер:

а) 1 cm одговара на 10 km **б)** 1 cm одговара на 250 m **в)** 2 cm одговара на 1 km

20. Даден е размерот на мапа, 1 : 400000.

Колкаво растојание е претставено со 1 cm?

21. Мапата на сликата прикажува еден остров.



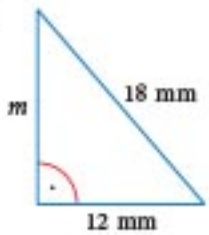
а) Пресметај растојание и азимут од градот Б до градот А.

б) Пресметај растојание и азимут од градот В до градот Б.

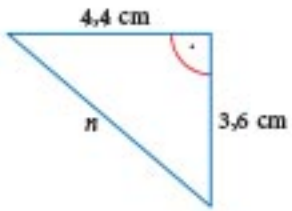
Во следните задачи заокружи ги решенијата на 3 значајни цифри, освен ако не е поинаку нагласено во задачата.

22. Пресметај ги должините означени со букви кај следниве правоаголни триаголници.

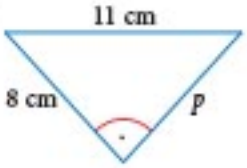
а)



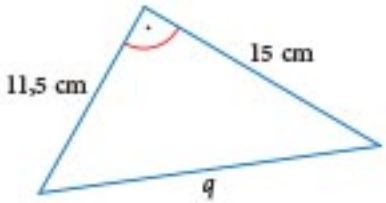
б)



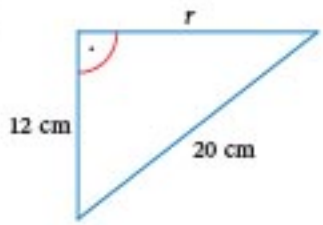
в)



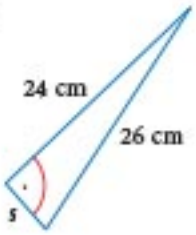
г)



д)

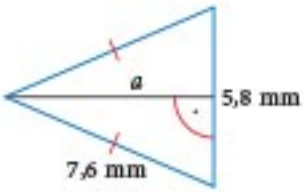


ѓ)

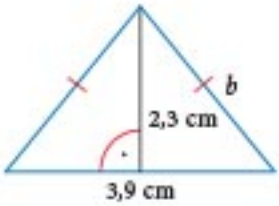


23. Пресметај ги должините означени со букви кај следниве рамнокраки триаголници.

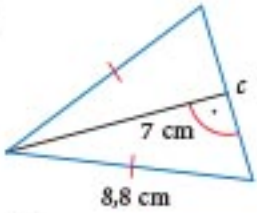
а)



б)

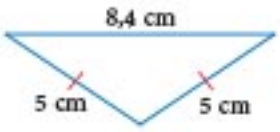


в)

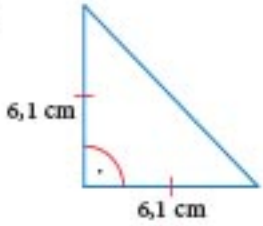


24. Пресметај ги плоштините на следниве рамнокраки триаголници.

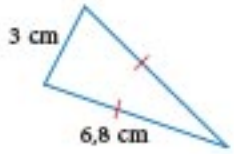
а)



б)



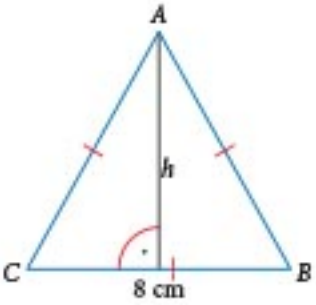
в)



25. ABC е рамностран триаголник.

а) Пресметај ја висината h.

б) Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC.

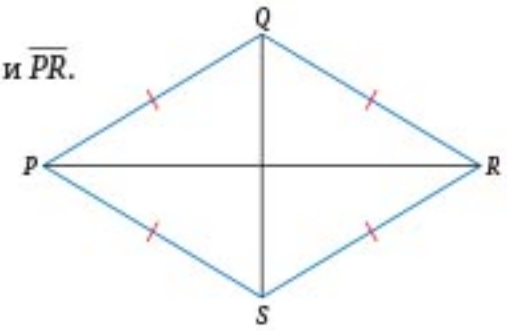


26. $PQRS$ е ромб.

На цртежот се нацртани неговите дијагонали $\overline{QS}$ и $\overline{PR}$.

$\overline{QS} = 8$ cm и $\overline{PR} = 12$ cm.

Пресметај ја должината на страната на ромбот.



Дијагоналите на ромбот се сечат под прав агол.

27. Еден брод плови 75 километри на север и потоа 150 километри на запад.

Колкава е неговата оддалеченост од почетното место?

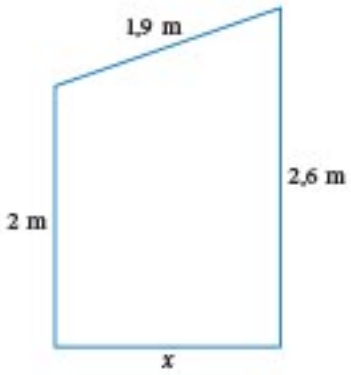
28. На цртежот е прикажан страничен поглед на шупа во градината.

Шупата е висока 2,6 метра напред и 2 метра назад.

Косиот раб на покривот е долг 1,9 метри.

Пресметај ја ширината на шупата, означена на цртежот со буквата x.

Решението заокружи го на најблискиот сантиметар.



29. Еден брод плови 154 километри на север, потоа 76 километри на исток, па 87 километри на југ.

Колкава е неговата оддалеченост од почетното место?

Решението заокружи го на најблискиот километар.

9 Мерење и решавање проблеми

Наставни цели

- Решава проблеми поврзани со просечна брзина.
- Изразува променлива преку други променливи во дадено равенство; изведува едноставни формули; користи формули од математика и други предмети.
- Заокружува броеви до одреден број на децимални места; заокружувањето го користи за да дојде до решение на проблем со одреден степен на точност.
- Решава проблеми поврзани со мерење во различни контексти.
- Користи мерка во различни мерни единици за правење споредба во секојдневни контексти, на пример графици за патување и за вредност на пари.
- Прецизно идентификува, организира, претставува и толкува информации во писмена форма, табеларно, графички и со дијаграм.
- Пресметува должина на отсечки, плоштина и волумен кај правоаголни призми и цилиндри.

9.1 Средна брзина

Побрзо од брзината на звукот

Во декември 1898 година бил поставен првиот светски рекорд во брзо возење на Земјата.

Гастон де Часелуп-Лубат од Франција станал првиот светски рекордер.

Победил со брзина од 63,15 km/h.

Речиси 100 години подоцна, во 1997 година, во пустината Блек Рок во САД била постигната рекордна брзина од 1227,986 km/h.

Првпат возило на Земјата се движело со брзина поголема од брзината на звукот.



Константна брзина

Брзината е една од величините со кои можеме да го опишеме движењето.

Кога се движиме со константна (постојана) брзина изминатиот пат е правопропорционален со изминатото време.

Задачите што се однесуваат на брзината, можеме да ги решиме со помош на пропорција.

Пример 1

Еден автомобил се движи со константна брзина.

Тој поминал 165 km за 3 часа.

Пресметај ја брзината на автомобилот во km/h.

Брзината во km/h го означува патот изминат за 1 час.

За 3 часа автомобилот поминал 165 km.

За 1 час автомобилот поминал 165 : 3 = 55 km. Делиме со 3 за да го најдеме изминатиот пат за 1 час.

Брзината е 55 km/h.

Решаваме на ист начин како кај единичниот метод за права пропорција.

Средна брзина

Од претходниот пример можеме да видиме дека врската помеѓу брзината, патот и времето е:

$$\text{брзина} = \frac{\text{пат}}{\text{време}}$$

Но, ретко луѓето патуваат со константна брзина.

Затоа користиме **средна брзина**, што ја пресметуваме за целиот изминат пат.

$$\text{средна брзина} = \frac{\text{вкупниот изминат пат}}{\text{вкупно време}}$$

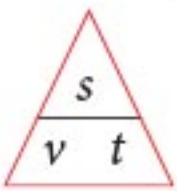
Ако земеме дека брзината v = средна брзина, s = вкупниот изминат пат, t = вкупното време да се помине целиот пат, тогаш формулата е:

$$v = \frac{s}{t}$$

Од оваа формула можеме да го изразиме s или t. Двете нови формули се:

$$s = v \cdot t \quad \text{и} \quad t = \frac{s}{v}$$

Триаголникот може да ни помогне да ја запомниме формулата.



За да ја најдеме формулата за брзина, ја покриваме буквата v.



Триаголникот сега покажува $\frac{s}{t}$. Тоа значи дека $v = \frac{s}{t}$

Ако ја покриеме буквата t, триаголникот покажува $\frac{s}{v}$, па $t = \frac{s}{v}$

Ако ја покриеме буквата s, триаголникот покажува vt, па $s = vt$.

$s = vt$ е исто со $s = v \cdot t$.

Пример 2

На еден автомобил-играчка му се потребни 12 секунди за да помине 96 cm.

Пресметај ја неговата средна брзина во cm/s.

Изминато време $t = 12$ и изминат пат $s = 96$

Со формулата, добиваме: $v = \frac{s}{t}$

$v = \frac{96}{12}$

$= 8$

Средната брзина е 8 cm/s.

Претворање часови во минути и обратно

Времињата 3 часа и 30 минути, 3,5 часа и $3\frac{1}{2}$ часа се еднакви.

Понекогаш потребно е да извршиме претворања меѓу нив.

Досега научивме да претворме дропки во децимални броеви и децимални броеви во дропки.

За да претвориме минути во часови, делиме со 60.

За да претвориме часови во минути, множиме со 60.

Го множиме или го делиме само децималниот дел односно минутниот дел од времето. Целиот број на часови останува ист.

Пример 3

а) Претвори 1 h 18 min во децимален број.

б) Претвори 4,7 часа во часови и минути.

а) Целиот број часови ќе остане ист.

$18 \text{ минути} = \frac{18}{60} \text{ часа}$

$= 0{,}3 \text{ часа}$

Според тоа, 1 h 18 min = 1,3 часа.

б) 4,7 часа се 4 часа и 0,7 часа.

$0{,}7 \text{ часа} = 0{,}7 \cdot 60 \text{ минути}$

$= 42 \text{ минути}$

4,7 часа = 4 h 42 min

Пример 4

Еден воз поминува 168 km од Скопје до Гевгелија со средна брзина од 70 km/h. Пресметај го времето на патување во часови и минути.

$s = 168$ и $v = 70$

Со формулата $t = \frac{s}{v}$

$t = \frac{168}{70}$

$= 2{,}4$

Време на патување = 2,4 часа

= 2 часа и 0,4 часа

= 2 часа и 0,4 · 60 минути

= 2 часа и 24 минути

Задачи

1. Најди ги средните брзини:

а) 150 km за 3 часа. (во km/h)

б) 100 m за 10 секунди. (во m/s)

в) 2475 km за 9 часа. (во km/h)

г) 27 km за 6 часа. (во km/h)

д) 16,5 km за 3 h 18 min. (во km/h)

ѓ) 23 km за 20 min. (во km/h)

2. Пресметај го изминатиот пат, ако се дадени средната брзина и времето:

а) 85 km/h за 4 часа.

б) 435 km/h за 6,5 часа.

в) 23 m/s за 24 секунди.

г) 96 km/h за $3\frac{1}{2}$ часа.

д) 75 cm/s за 0,8 секунди

ѓ) 125 km/h за 4 h 54 min.

3. Пресметај го времето потребно да се изминат:

а) 150 km со 75 km/h.

б) 160 km со 64 km/h

в) 84 m со 28 m/s

г) 22,5 km со 3,75 km/h

д) 3750 km со 600 km/h

ѓ) 19 km со 4 km/h

4. Еден воз изминува 130 km за $2\frac{1}{2}$ часа. Пресметај ја неговата средна брзина.

5. Растојанието од Лондон до Мадрид е 1260 km.

Авионот лета од Лондон до Мадрид за 2 h 15 min.

Пресметај ја средната брзина на авионот.

6. Јана возела велосипед и поминала пат од 27,3 km со средна брзина 6,5 km/h.

Пресметај, во часови и минути, за колку време го поминала овој пат.

7. Велосипедист поминал пат од 209 km за 43 часа и 48 минути.

Одреди ја неговата просечна брзина на возење.

8. Еден авион се движи 2 часа и 24 минути со брзина од 360 km/h.

Пресметај колку километри ќе помине за ова време.

9. Автомобил се движи со брзина од 84 km/h за време од $1\frac{1}{2}$ часа, а потоа се движи 2 часа со брзина од 66 km/h.

Пресметај го вкупниот пат што го поминал автомобилот.

10. Воз поминал пат од 144 km со брзина од 80 km/h и потоа уште 130 km со брзина од 50 km/h.

Пресметај ја средната брзина со која се движел возот.

Прво пресметај го вкупното растојание и вкупното време.

11. Автомобил и велосипедист тргнуваат истовремено од исто место.

Се движат по ист пат за време од $3\frac{1}{2}$ часа.

Средната брзина на автомобилот е 56 km/h, а средната брзина на велосипедистот е 16 km/h.

Пресметај го растојанието меѓу нив по $3\frac{1}{2}$ часа.

Пресметај колкав пат поминал секој од нив.

12. Матеј оди пеш 12 km од дома до куќата на неговиот другар, со средна брзина од 6 km/h.

Неговата просечна брзина до куќата на неговиот другар и назад до дома, е 4 km/h.

Колку часа му се потребни да се врати дома пеш?

Прво, пресметај го времето потребно да стигне до куќата на неговиот другар. Потоа, пресметај го вкупното време до куќата на неговиот другар и назад до неговата куќа.

9.2 Изведени мерни единици

Изведена мерна единица е онаа мерка што вклучува мерни единици од две различни величини.

Средната брзина е пример за изведена мерна единица, бидејќи таа го изразува патот изминат за одредено време.

Други примери за изведени мерни единици:

- притисок, мерен во њутни на квадратен метар.
- проток на течност, измерена во литри во секунда.
- цена на стока, измерена во денари за грам или во денари за литар.

Постојат и многу други.

Во многу изведени мерни единици ги употребуваме зборовите „за“, „во“ или „на“.

Тоа кажува дека една величина се дели со друга величина.

Пример 1



Детергент се продава во две различни шишиња.

Детергентот А содржи 1,6 литри и чини 288 денари.

Детергентот Б содржи 3 литри и чини 495 денари.

Пресметај што е поповолно, да се купи детергентот А или детергентот Б.

Во пресметките, одговорите ќе ги заокружуваме на 4 децимални места.

Прв начин: Ќе ја најдеме пониската цена за еден литар.

Детергентот А се продава по цена 288 денари за 1,6 литри.

Цена за 1 литар = 288 : 1,6 = 180

Цената на 1 литар од детергентот А е 180 денари.

Детергентот Б се продава по цена 495 денари за 3 литри.

Цена за 1 литар = 495 : 3 = 165

Цената на 1 литар од детергентот Б е 165 денари.

Детергентот Б се продава по 165 денари за 1 литар, значи поповолно е да се купи детергентот Б.

Начин 2: Ќе го најдеме поголемото количество во литри за еден денар.

1,6 литри од детергентот А се продаваат за 288 денари.

литри за 1 денар = 1,6 : 288 = 0,0056 (заокружена на 4 децимални места)

0,0056 литри од детергентот А се продаваат за 1 денар.

3 литри од детергентот Б се продаваат за 495 денари.

литри за денар = 3 : 495 = 0,0061 (заокружено на 4 децимални места)

0,0061 литри од детергентот Б се продаваат за 1 денар.

Со детергентот Б се добива повеќе количество за 1 денар, значи поповолно е да се купи детергентот Б.

Примена на графици

На цртежот е прикажан еден **график на изминат пат (пат-време)**.

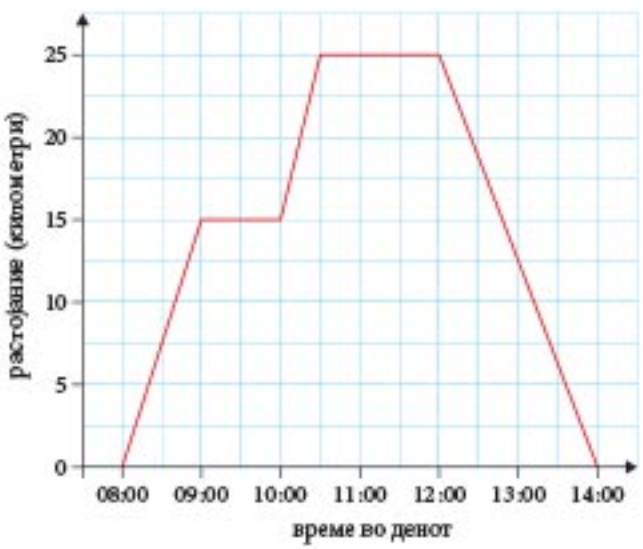
Тој го прикажува возењето велосипед на Светлана.

Таа тргнала од дома во 8:00, а се вратила во 14:00.

Од графикот можеме да ја пресметаме нејзината брзина помеѓу 8:00 и 9:00.

Изминала пат од 15 km за 1 час. Нејзината брзина за тоа време била 15 km/h.

Колкава била нејзината средна брзина?



Светлана возела 25 km и потоа се вратила назад. Вкупниот пат што го изминала е 50 km.

Во текот на денот се одморала $2\frac{1}{2}$ часа, а возела $3\frac{1}{2}$ часа.

Нејзината средна брзина е 50 : 3,5 = 14,29 km/h (заокружена на 2 децимални места).

Пример 2

Петар во весник видел реклами со специјални понуди од страна на две компании за мобилна телефонија, „М“ и „Т“.



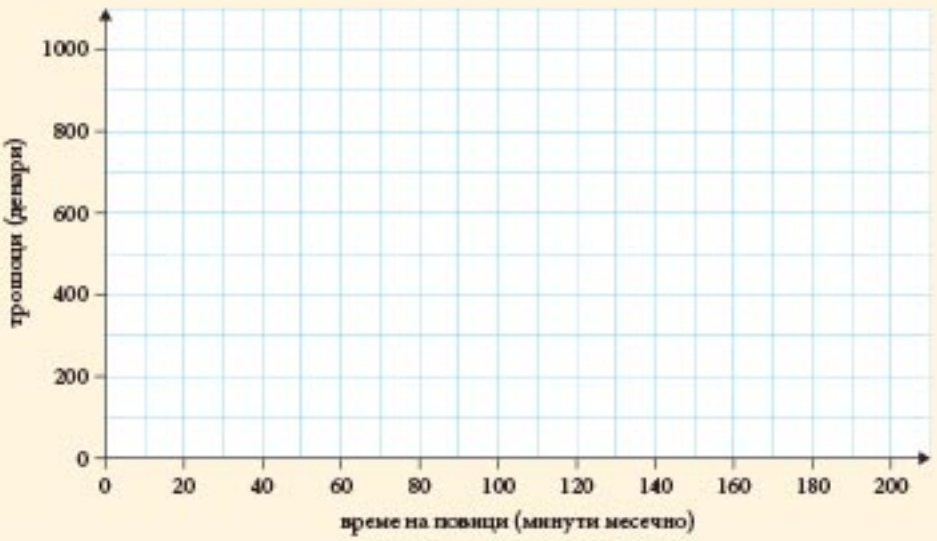
а) Прикажи ги двете понуди во координатен систем.

На хоризонталната оска ќе го претставиме времето на повици до 200 минути месечно.

На вертикалната оска ќе ги претставиме трошоците до 1000 денари.

б) По колку минути месечно понудата на „М“ е поповолна?

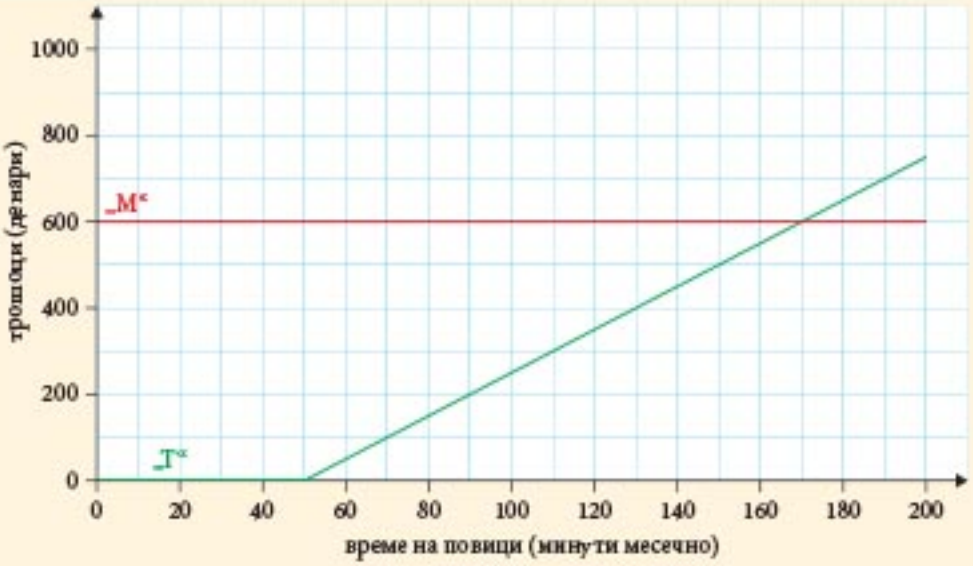
а) Да го нацртаме координатниот систем.



Во табелата се прикажани трошоците на секоја компанија за различен број минути месечно.

Време (минути)	0	30	60	100	150	200
Трошоци со „М“	600	600	600	600	600	600
Трошоци со „Т“	0	0	50	250	500	750

Ги означуваме точките на графикот и ги поврзуваме со отсечки.



б) Графикот прикажува две прави што се сечат во 170 минути месечно.

Лево од оваа точка пониска е зелената права, па „$Т^{\alpha}$ е поевтин.

Десно од оваа точка пониска е црвената права, па „$М^{\alpha}$ е поевтин.

Понудата на „$М^{\alpha}$ е поповолна ако се разговара повеќе од 170 минути месечно.

Задачи

1. Храната за мачиња се продава во две различни пакувања.



Пакување од 420 g се продава за 63 денари, а пакувањето од 600 g се продава за 99 денари.

Пресметај што е поповолно да се купи, помалото или поголемото пакување?

2. Маслото за готвење се продава во три различни пакувања.

500 ml чинат 159 денари

1 литар чини 299 денари

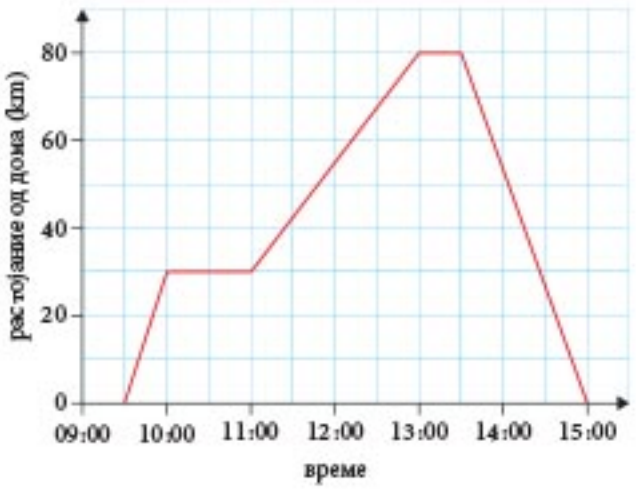
2,4 литра чинат 724 денари

Пресметај кое пакување е најповолно за купување.

Прикажи ја целата постапка.

3. Коста заминал од дома во 9:30 за да го посети местото што е оддалечено 80 km од неговиот дом.

Графикот го прикажува неговото движење тој ден.



а) Пресметај ја неговата брзина помеѓу 11:00 и 13:00.

б) Во кој дел од патувањето тој се движел најбрзо? Како можеш да одредиш?

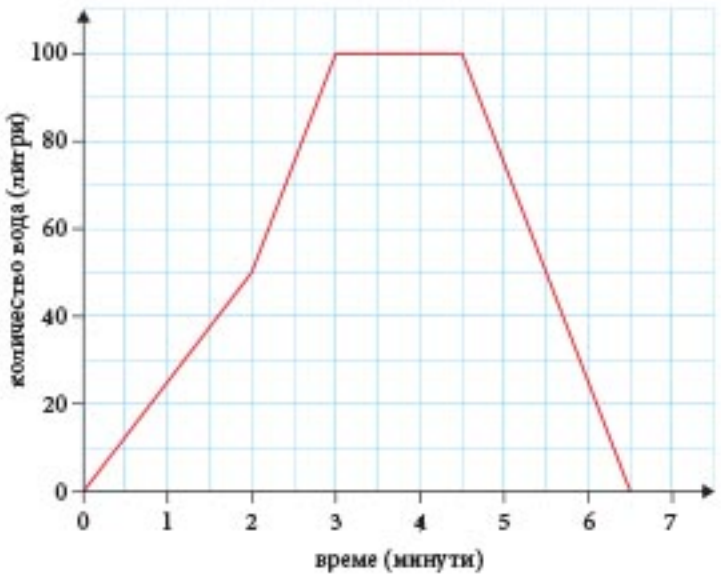
в) Пресметај ја неговата средна брзина за целиот ден.

4. Продавница А ја нуди следнава специјална понуда: 1,5 kg брашно се продава за 46 денари.

Во продавница Б, една вреќа со 25 kg од истото брашно се продава за 750 денари.

Кој продава по поповолна цена, продавница А или продавница Б?

5. На следниот график е прикажано количеството вода во када кога се полни и потоа кога се празни.



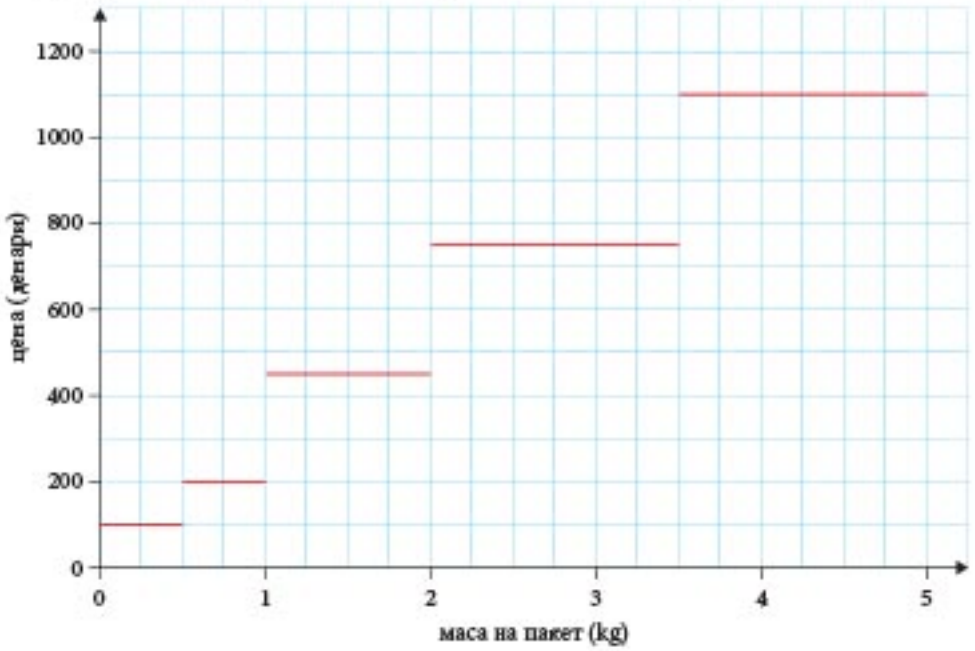
а) Колкаво количество вода има во кадата кога е полна?

б) Со колкаво количество вода се наполнила кадата во првите 2 минути?

в) Пресметај го протокот во првите 2 минути, во литри во минута.

г) Пресметај го протокот кога кадата се празни, во литри во минута.

6. Графикот ја прикажува цената за испраќање пакети преку компанијата X.



Од графикот може да се види, на пример, дека за испраќање пакети до 500 g се плаќаат 100 денари.

а) Запиши ги трошоците за испраќање пакети со следниве маси преку компанијата X.

i 900 g **ii** 1,4 kg **iii** 3,4 kg **iv** 3,75 kg

Компанијата Y нуди фиксна цена од 250 денари по килограм.

Испраќањето пакет со маса 3,1 kg би чинело $3{,}1 \cdot 250 = 775$ денари.

б) Пресметај ги трошоците за испраќање на четирите пакети под **а)** преку компанијата Y.

в) За секој пакет, запиши која компанија е поевтина и за колку.

7. Густината на 3Д-форма е сложена мерка на релативната маса.

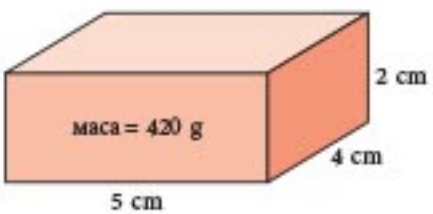
Таа се пресметува со делење на масата во грамови со волуменот во cm^3.

Единицата за густина е g/cm^3.

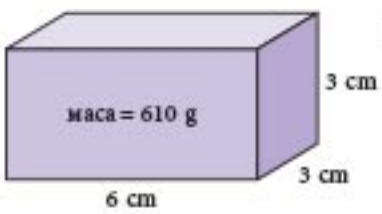
а) Пресметај ја густината на дадените квадари во g/cm^3.

волумен = должина · ширина · висина

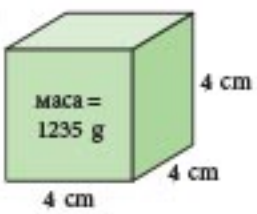
i



ii



iii



Во табелата се прикажани густините на неколку метали.

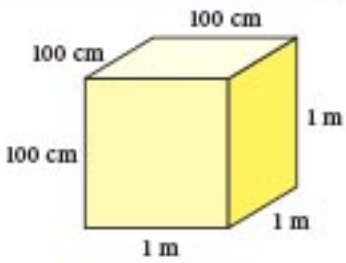
Алуминиум	Хром	Бакар	Злато	Железо	Олово	Сребро	Титаниум
2,7 g/cm³	7,15 g/cm³	8,96 g/cm³	19,3 g/cm³	7,86 g/cm³	11,3 g/cm³	10,49 g/cm³	4,51 g/cm³

б) Запиши од кој вид метал е изработен секој од квадарите.

Утврди кој метал има густина блиска до решението за секој квадар под **а)**.

9.3 Волумен

Мерни единици за волумен



Димензиите на коцката на цртежот се 1 метар, 1 метар и 1 метар.

Нејзиниот волумен е $1\text{ m} \cdot 1\text{ m} \cdot 1\text{ m} = 1\text{ m}^3$

Димензиите на коцката исто така се и 100 cm, 100 cm и 100 cm.

Нејзиниот волумен е $100\text{ cm} \cdot 100\text{ cm} \cdot 100\text{ cm} = 1000000\text{ cm}^3$

Значи, $\mathbf{1\text{ m}^3 = 1000000\text{ cm}^3}$

Ако ги измериме димензиите на коцката во милиметри, волуменот е $1000\text{ mm} \cdot 1000\text{ mm} \cdot 1000\text{ mm} = 1000000000\text{ mm}^3$.

Според тоа, 1 милијарда кубни милиметри се еднакви на 1 кубен метар.

$\mathbf{1\text{ m}^3 = 1000000000\text{ mm}^3}$

Кога претвораме мерни единици за волумен, го пресметуваме кубот на коефициентот за претворање должина.

$1\text{ km} = 1000\text{ m}$

Така, $1\text{ km}^3 = 1000\text{ m} \cdot 1000\text{ m} \cdot 1000\text{ m} = 1000000000\text{ m}^3$

Пример 1

Претвори.

а) $5{,}3\text{ m}^3$ во cm^3 **б)** 12 cm^3 во mm^3 **в)** 4500000 cm^3 во m^3

а) $1\text{ m} = 100\text{ cm}$ Ова е коефициентот за претворање должина.

$1\text{ m}^3 = 100\text{ cm} \cdot 100\text{ cm} \cdot 100\text{ cm} = 1000000\text{ cm}^3$ Ова е коефициентот за претворање волумен.

$5{,}3\text{ m}^3 = 5{,}3 \cdot 1000000 = 5300000\text{ cm}^3$

б) $1\text{ cm} = 10\text{ mm}$

$1\text{ cm}^3 = 10\text{ mm} \cdot 10\text{ mm} \cdot 10\text{ mm} = 1000\text{ mm}^3$

$12\text{ cm}^3 = 12 \cdot 1000 = 12000\text{ mm}^3$

в) $1\text{ m} = 100\text{ cm}$

$1\text{ m}^3 = 100\text{ cm} \cdot 100\text{ cm} \cdot 100\text{ cm} = 1000000\text{ cm}^3$

$4500000\text{ cm}^3 = 4500000 : 1000000 = 4{,}5\text{ m}^3$

Волумен на течност

Волумен на еден сад е големината на просторот што го зафаќа садот.

Сад со волумен од 1000 cm^3 може максимално да собере 1 литар.

$\mathbf{1000\text{ cm}^3 = 1000\text{ ml}}$

$\mathbf{1\text{ cm}^3 = 1\text{ ml}}$

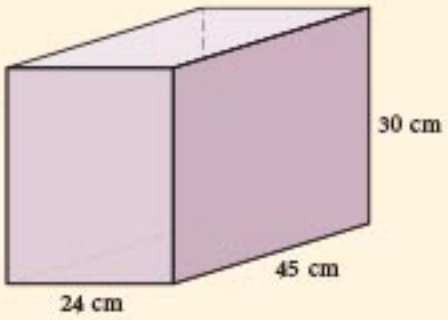
Пример 2

На сликата е прикажан аквариум за риби.

Аквариумот е долг 45 cm, широк 24 cm и длабок 30 cm.

а) Пресметај го волуменот во cm^3.

б) Пресметај го волуменот на аквариумот во литри.



а) Волумен = должина · ширина · длабочина

$= 45 \cdot 24 \cdot 30$

$= 32400\ cm^3$

б) Волумен = 32400 ml

$= 32400 : 1000$

$= 32{,}4\ l$

Аквариумот за риби собира 32,4 литри вода кога е полн.

Задачи

1. Претвори во cm^3.

а) $2\ m^3$ **б)** $5{,}6\ m^3$ **в)** $6000\ mm^3$ **г)** $9600\ mm^3$

2. Претвори во mm^3.

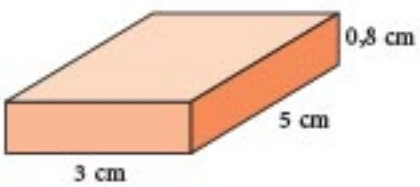
а) $3\ m^3$ **б)** $0{,}75\ m^3$ **в)** $9\ cm^3$ **г)** $1{,}4\ cm^3$

3. Претвори во m^3.

а) $7000000\ cm^3$ **б)** $12500000\ cm^3$

4. **а)** Пресметај го волуменот на квадарот на цртежот во cm^3.

б) Пресметај го волуменот на квадарот на цртежот во mm^3.



5. Пресметај колку милилитри течност собира квадарот од задача 4.

6. Пресметај го волуменот во милилитри на садовите со волумен:

а) $25\ cm^3$ **б)** $125\ cm^3$ **в)** $2500\ cm^3$ **г)** $8000\ mm^3$

7. Весна има вреќа што содржи 1500 cm^3 храна за птици.

Таа планира да ја спакува храната во мали кутии со димензии 6 cm, 4 cm и 15 mm.

а) Пресметај го волуменот на една мала кутија.

б) Колку мали кутии можат да се наполнат од вреќата?

в) Колку храна ќе остане во вреќата?

Внимавај, има различни мерни единици.

8. Кире има 40 кутии со сок.

Секоја кутија има димензии 4 cm, 5 cm и 5 cm.

а) Пресметај го волуменот на една кутија во cm^3.

б) Пресметај колку вкупно литри сок има Кире.

9. Чоколадите „чоко“ се продаваат во мали пакувања.

Секое мало пакување има димензии 15 cm, 10 cm и 4 cm.

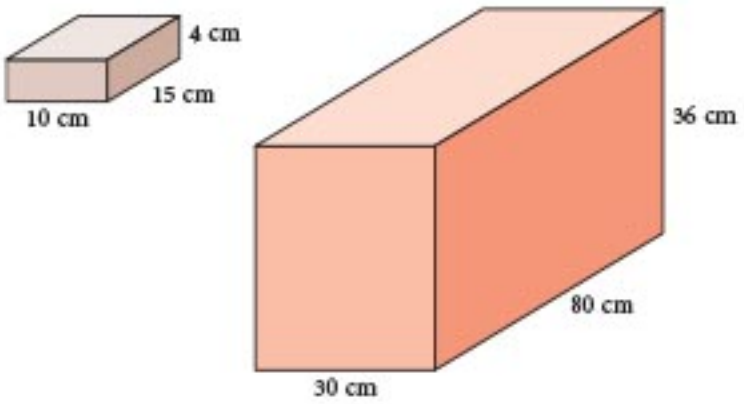
Компанијата што ги произведува сака да ги пакува чоколадите во големи кутии.

Секоја голема кутија има димензии 80 cm, 30 cm и 36 cm.

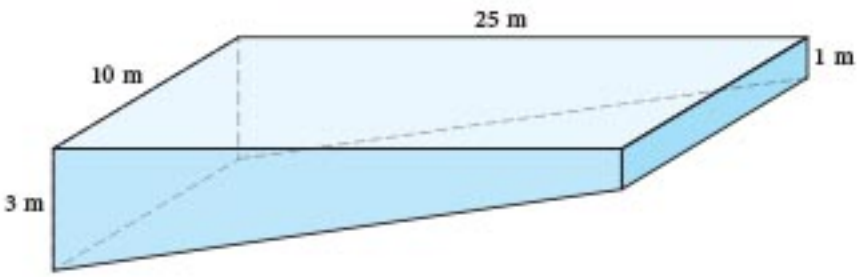
Организирај го распоредот на чоколадите во големата кутија така што да нема празнини меѓу нив.

а) Пресметај колку пакувања чоколади „чоко“ собира во големата кутија.

б) Нацртај дијаграм за да прикажеш како треба да се пакуваат чоколадите.



10. На цртежот е прикажан базен долг 25 метри.



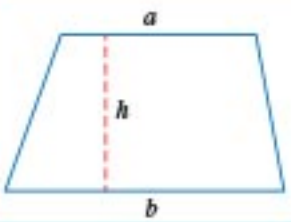
Базенот е длабок 1 метар во плиткиот дел и 3 метри на длабокиот дел.

Страничниот ѕид е трапез.

а) Пресметај ја плоштината на страничниот ѕид во m^2.

Базенот е широк 10 метри.

б) Пресметај го волуменот на базенот во m^3.



Формулата за плоштина на трапезот е $P = \frac{1}{2}(a + b)\,h$

в) Пресметај го волуменот на базенот во литри.

Запомни дека 1 литар = 1000 cm^3.

9.4 Призма и цилиндар

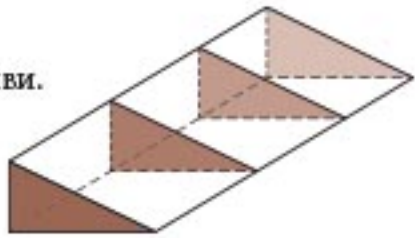
Волумен на призма

Призма е 3Д-форма.

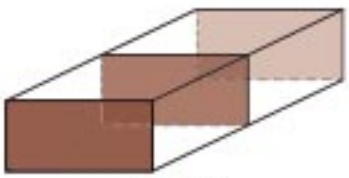
Напречните пресеци по целата должина на призмата се еднакви.

На цртежот е прикажана призма со основа триаголник.

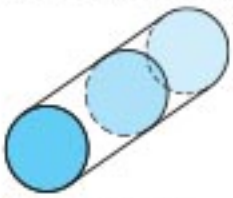
Сите триаголни напречни пресеци на призмата се складни триаголници.



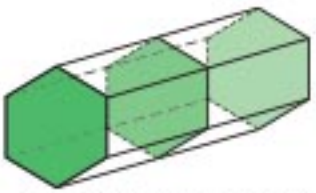
На цртежите се прикажани уште три геометриски 3Д-форми.



квадар
(призма со основа правоаголник)



цилиндар
(3Д-форма со основа круг)



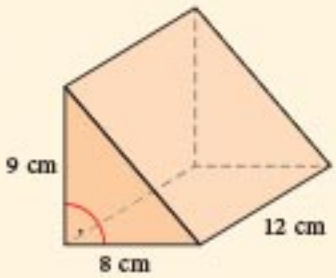
призма со основа шестаголник

Формулата за пресметување волумен на призма и цилиндар е:

волумен на призма/цилиндар = плоштина на напречен пресек · должина

Пример 1

Пресметај го волуменот на призма со основа правоаголен триаголник.



Прво ја пресметуваме плоштината на напречниот пресек.

плоштина на триаголник $= \frac{1}{2} \cdot$ основа $\cdot$ соодветна висина

$= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 9 = 36\ \text{cm}^2$

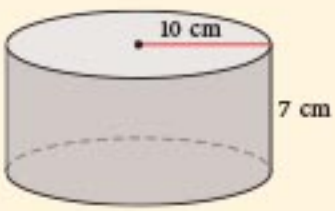
волумен на призма = плоштина на напречен пресек · должина

$= 36 \cdot 12 = 432\ \text{cm}^3$

Користиме мерна единица cm^3 бидејќи пресметуваме волумен.

Пример 2

Пресметај го волуменот на дадениот цилиндар. Решението заокружи го на 2 значајни цифри.



Напречниот пресек на цилиндарот е круг.

Плоштината на кругот е πr^2.

Волуменот на цилиндар е $V = \pi r^2 h$, каде што r е радиусот, а h е висината на цилиндарот.

$V = \pi r^2 h$

$= \pi \cdot 10^2 \cdot 7$

$= 2199{,}114858$ Пресметано π со калкулатор.

$= 2200\ \text{cm}^3$ Заокружено на 2 значајни цифри.

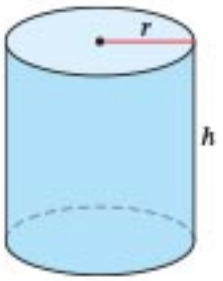
Плоштина на 3Д-форма

Плоштината на една 3Д-форма ја наоѓаме како збир од плоштините на сите ѕидови на 3Д-формата.

Кај призмата сите ѕидови се 2Д-форми.

Ги пресметуваме плоштините на сите ѕидови и потоа ги собираме.

Да ја разгледаме постапката за пресметување плоштина на цилиндар.

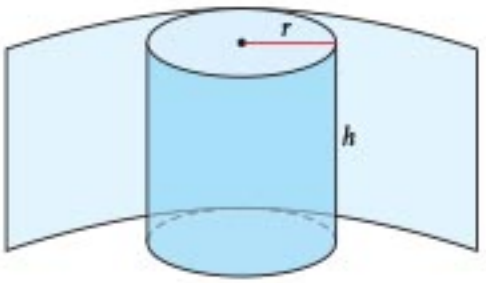


Даденият цилиндар има радиус r и висина h.

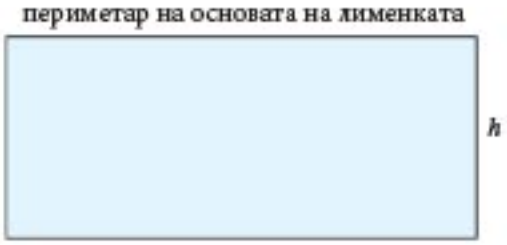
Цилиндарот е составен од две основи и еден страничен ѕид што е закривена површина.

Плоштината на основата = πr^2.

За да ја најдеме плоштината на страничниот ѕид, замислуваме дека цилиндарот е лименка и дека ја одлепуваме лепенката залепена по целата површина на страничниот ѕид.



Страничниот ѕид е всушност правоаголник.



Висината на правоаголникот е h, а неговата должина е еднаква со периметарот на кружницата што е пресек на страничниот ѕид и основите на лименката.

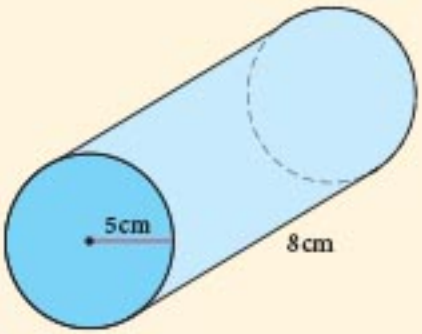
Периметарот на кружницата е $2\pi r$, па плоштината на правоаголникот е $2\pi rh$.

Плоштината на цилиндарот = плоштина на страничниот ѕид + плоштина на двата круга (основи).

плоштина на цилиндар $= 2\pi rh + 2\pi r^2$

Пример 3

Пресметај ја плоштината на даденият цилиндар. Решението заокружи го на 3 значајни цифри.



Плоштината на едната основа $= \pi r^2$

$= \pi \cdot 5^2$

$= 78{,}5398$ Не заокружуваме на 3 значајни цифри сè до крајното решение.

Плоштината на другата основа $= 78{,}5398$

Плоштината на страничниот ѕид $= 2\pi rh$

$= 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 8$

$= 251{,}3274$

Мерната единица е cm^2 бидејќи пресметуваме плоштина.

Вкупната плоштина $= 78{,}5398 + 78{,}5398 + 251{,}3274$

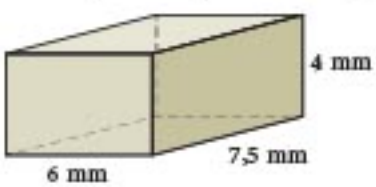
$= 408\ cm^2$ Заокружена на 3 значајни цифри.

Задачи

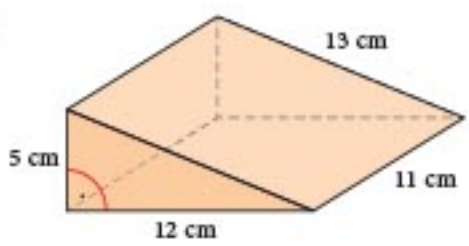
Решенијата на следните задачи да се заокружат на 3 значајни цифри, каде што е тоа неопходно.

1. Пресметај го волуменот на дадените призми.

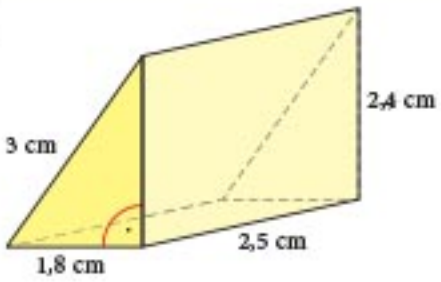
а)



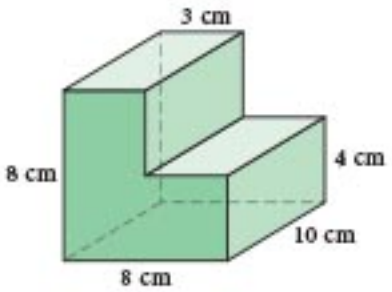
б)



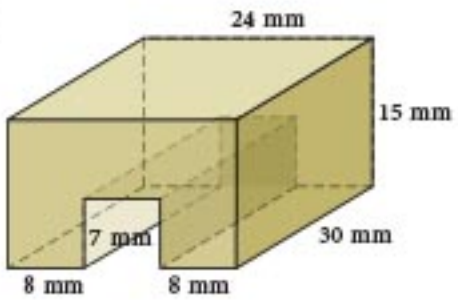
в)



г)



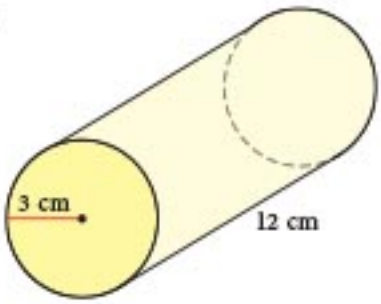
д)



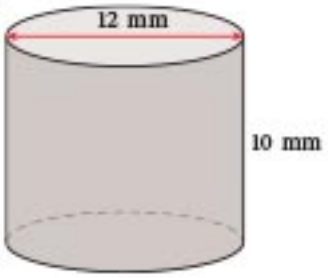
2. Пресметај ја плоштината на призмите од задача **1**.

3. Пресметај ги волумените на следниве цилиндри.

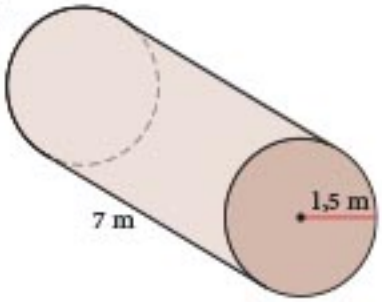
а)



б)



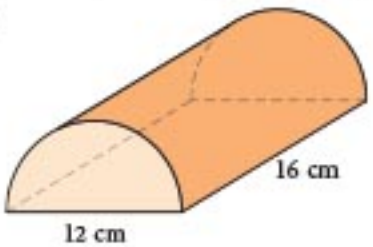
в)



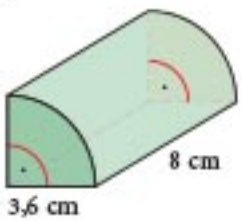
4. Пресметај ја плоштината на цилиндрите од задача **3**.

5. Пресметај го волуменот на дадените 3Д-форми.

а)



б)



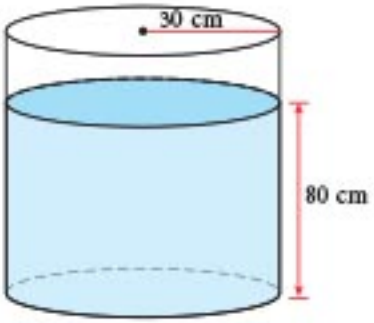
6. Пресметај ја плоштината на 3Д-формите од задача **5**.

7. Едно буре со вода има форма на цилиндар со радиус 30 cm. Водата во бурето е длабока 80 cm.

а) Колкав е волуменот на водата во бурето?

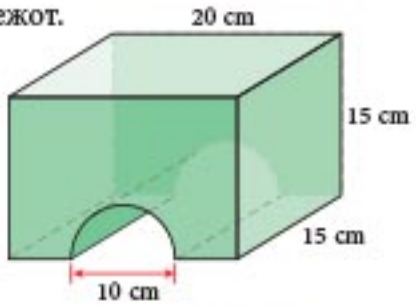
б) Колку литри вода има во бурето?

$1\ cm^3 = 1$ милилитар



8. **а)** Пресметај го волуменот на 3Д-формата прикажано на цртежот.

б) Пресметај ја неговата плоштина.

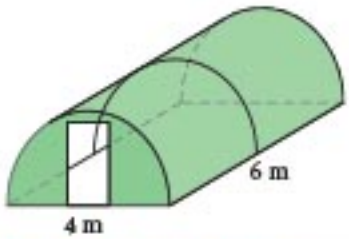


9. На сликата е прикажан стаклениkот на Филип, изграден со помош на три обрачи.

Секој обрач е полукружница.

Ширината на стаклениkот е 4 метри.

а) Пресметај ја должината на секој од обрачите.



Филип сакал да купи греалка на распродажба.

Таа е доволно моќна да затопли простор од 40 m^3.

б) Пресметај го волуменот на стаклениkот.

в) Дали греалката е доволно моќна да го загрее целиот стакленик на Филип?

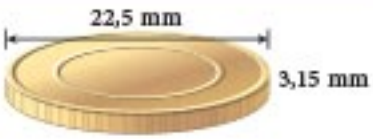
Пресметај ја плоштината на една полукружница.

Потоа помножи ја со должината на стаклениот за да го најдеш волуменот.

10. Една монета е дебела 3,15 mm и има дијаметар 22,5 mm.

Колекционерот собира вакви монети и ги става на купче.

Купчето содржи 56 идентични монети.



а) Пресметај ја вкупната висина на купчето монети.

б) Пресметај го волуменот на купчето монети во cm^3.



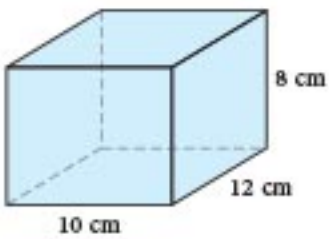
Внимавај на различните мерни единици. Претвори ги должините во сантиметри пред да го пресметаш волуменот.

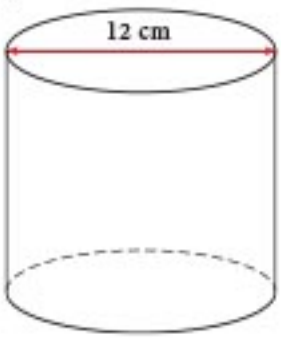
Секоја монета има маса 9,5 грама.

в) Пресметај ја вкупната маса на купчето монети.

Запиши го решението во килограми.

11. Резервоарот во форма на квадар прикажан лево е полн со вода.





Прво пресметај го волуменот на водата во резервоарот во форма на квадар.

Водата се претура во цилиндричниот резервоар прикажан десно.

Пресметај до која висина ќе достигне водата во цилиндарот.

Решението заокружи го на најблискиот милиметар.

Задачи за повторување

1. Пресметај ја средната брзина во km/h на возилата што минуваат:

а) 210 km за $3\frac{1}{2}$ часа

б) 168 km за 4 часа

в) 17 km за 3 часа и 24 минути

г) 285 km за 3 часа и 48 минути.

2. Најди го патот што го изминуваат објектите движејќи се со:

а) 56 km/h за 6 часа

б) 12 km/h за $4\frac{1}{2}$ h

в) 65 m/s за 12 секунди

г) 250 km/h за 3 h 18 min.

3. Пресметај го времето потребно да се изминат следниве растојанија. Решенијата запиши ги во часови и минути.

а) 400 km со 50 km/h

б) 135 km со 27 km/h

в) 240 km со 50 km/h

г) 23,5 km со 2,5 km/h

4. Полжавот се поместува 23,4 метри за 30 минути.

а) Пресметај ја неговата средна брзина во метри/час.

б) Претвори ја брзината во метри/секунда.

5. Еден воз патува 2h 48 min со средна брзина 140 km/h.

Колкав пат ќе измине за тоа време?

6. Еден автобус се движи со средна брзина 55 km/h.

Пресметај колку време ќе му биде потребно на автобусот за да помине 22 km?

7. Моторното масло се продава во две различни пакувања.



Малата кантичка собира 2 литра и чини 459 денари.

Големата кантичка собира 4,5 литри и чини 999 денари.

Пресметај што е поповолно да се купи, помалата или поголемата кантичка?

8. Вариниот грав се продава во три различни пакувања.

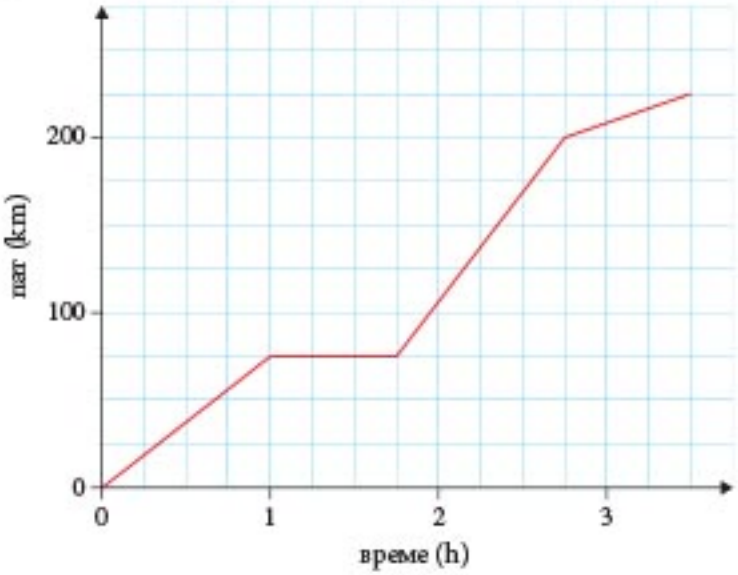


Пресметај кое пакување има најповолна цена.

Прикажи ја целата постапка.

9. Следниот график го прикажува патот што го изминал возот по напуштањето на главната станица.

Кратко по напуштањето на главната станица возот запрел на семафор.



а) Колкав вкупен пат изминал возот?

б) Пресметај ја средната брзина за целиот пат, со времето додека возот чекал на семафор.

Запиши го решението заокружено на 1 децимално место.

в) Пресметај ја средната брзина со која се движел возот, без времето на чекање на семафорот.

Запиши го решението заокружено на 1 децимално место.

10. Златко има резервоар што може да собере 25 литри течност.

Тој сака да наполни неколку мали лименки со форма на цилиндар.

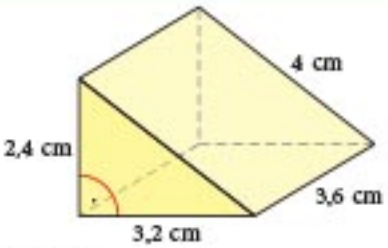
Секоја лименка е висока 10 cm и има радиус 3 cm.

Златко сака да наполни 100 лименки.

Запомни дека 1 литар = 1000 cm^3.

Пресметај дали тој има доволно течност за да ги наполни сите 100 лименки.

Покажи како си решил.



11. **а)** Пресметај го волуменот на оваа призма во cm^3.

б) Пресметај го волуменот на призмата во mm^3.

12. Пресметај ја плоштината на призмата од претходната задача.

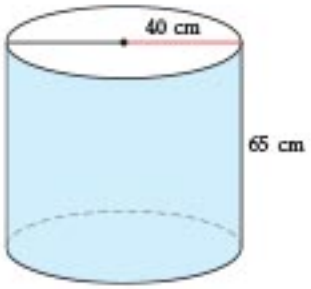
а) Решението запиши го во cm^2.

б) Решението запиши го во mm^2.

13. Претвори ги следниве волумени во дадените мерни единици.

а) $3\ m^3$ во cm^3 **б)** $8000\ mm^3$ во cm^3 **в)** $4\ cm^3$ во mm^3 **г)** $3500000\ cm^3$ во m^3

14. На цртежот е прикажан цилиндричен резервоар за вода.



а) Пресметај го волуменот на резервоарот во cm^3.

б) Запиши го волуменот на резервоарот во литри.

Заокружи го решението до најблискиот литар.

15. Запиши го волуменот во милилитри на резервоар со волумен:

а) 450 cm **б)** $1000\ cm^3$ **в)** $5000\ mm^3$

16. Волуменот на резервоарот е $2\ m^3$.

Пресметај колку литри може да собере резервоарот.

10 Работа со податоци и решавање проблеми

Наставни цели

- Избира, црта и толкува дијаграми и графици, вклучувајќи:
  - дијаграми на фреквенции за дискретни и континуирани податоци;
  - линиски график за временски период;
  - дијаграми со точки, за да се развие разбирање за корелација;
  - последователни стебло-лист дијаграми.
- Толкува табели, графици и дијаграми со дискретни и континуирани податоци, изведува заклучоци, поврзувајќи ги статистичките податоци и наодите со првичното прашање.
- Ја разбира релативната фреквенција како проценка на веројатноста и ова го користи за споредба на резултатите од експерименти во различен контекст.
- Знае дека збирот на веројатности кои меѓусебно се исклучуваат е 1 и го користи ова кога решава проблеми со веројатност.
- Ги наоѓа и евидентира сите резултати за два последователни настани.

10.1 Дијаграми со точки и корелација

Кампување и продажби на сладолед

Френсис Галтон бил англиски математичар кој живеел во XIX век.

Тој дефинирал многу статистички идеи, меѓу кои и корелацијата.

Корелацијата вклучува потреба за усогласеност и поврзаност меѓу величините.

На пример, при топло време помалку се користи електрична енергија.

Количеството електрична енергија што се користи е директно поврзано со времето.

При топло време повеќе луѓе одат на кампување и се продаваат повеќе сладоледи. Постои усогласеност помеѓу продажбата на сладолед и кампувањето, но тие не се директно поврзани – и двете зависат од времето.





Дијаграми со точки

Дијаграмите со точки се употребуваат да прикажат парови податоци.

Точките во координатниот систем ги претставуваме со ознаката „x“.

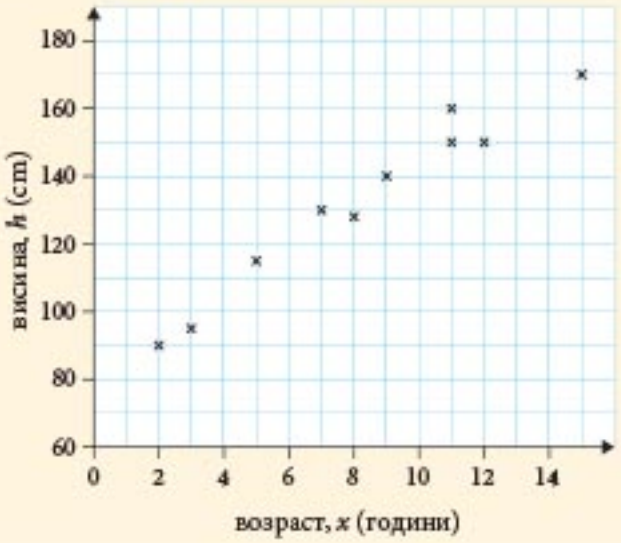
Кога цртаме дијаграми со точки, точките треба внимателно да ги цртаме.

Пример 1

Во табелата е прикажана висината h, во сантиметри, и возраста x, во години, на повеќе деца.

Возраст, x (години)	2	3	5	7	8	9	11	11	12	15
Висина, h (cm)	90	95	115	130	128	140	150	160	150	170

Нацртај дијаграм со точки за да ги прикажеш овие податоци.



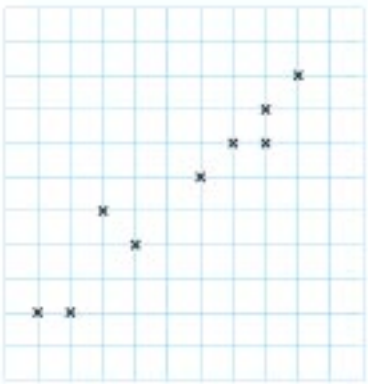
Корелација

Дијаграмите со точки ги користиме кога треба да ја прикажеме **корелацијата** меѓу податоците.

Корелација е врска помеѓу две променливи. Кога ги интерпретираме дијаграмите со точки, можеме да најдеме една или повеќе точки што не одговараат на тенденцијата или обликот. Дадениот дијаграм прикажува **силна позитивна корелација**.

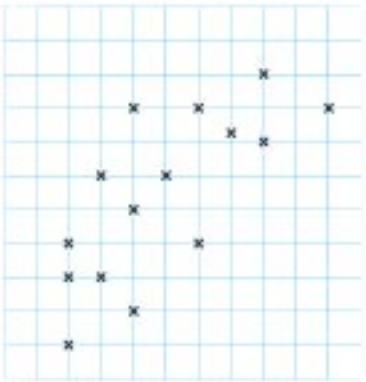
Точките се блиску до замислена права што се протега „од долу лево до горе десно“ на дијаграмот со точки.

Ако точките лежат на права, тогаш тоа го нарекуваме совршена позитивна корелација.



Овој дијаграм прикажува слаба позитивна корелација.

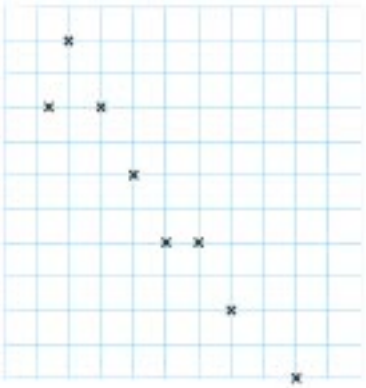
Точките не се блиску до замислена права, но сè уште постои општа тенденција или облик што се протега „од долу лево до горе десно“ на дијаграмот со точки.



Овој дијаграм прикажува силна **негативна корелација**.

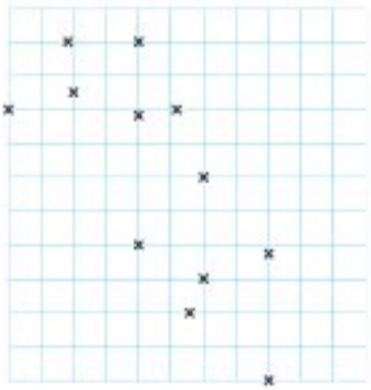
Точките се блиску до замислена права што се протега „од горе лево до долу десно“ на дијаграмот со точки.

Ако точките лежат на правата, тоа се нарекува совршена негативна корелација.



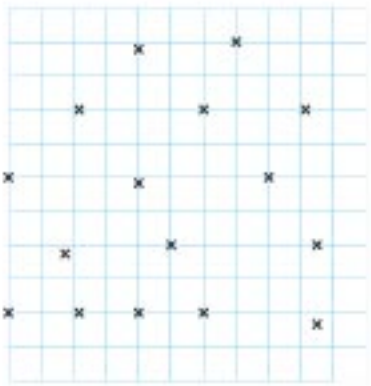
Овој дијаграм прикажува слаба негативна корелација.

Точките не се блиску до замислена права, но сè уште постои општа тенденција или облик што се протега „од горе лево до долу десно“ на дијаграмот со точки.



Овој дијаграм **не прикажува корелација**, односно прикажува **нулта корелација**.

На овој дијаграм со точки нема прикажано никаква тенденција или облик.



Пример 2

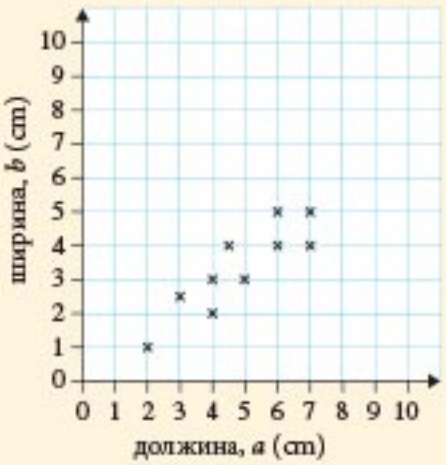
Во табелата се прикажани должината a, во cm, и ширината b, во cm, на неколку камчиња од плажа.

Должина, a (cm)	4	5	4	6	4,5	3	7	7	2	6
Ширина, b (cm)	2	3	3	4	4	2,5	4	5	1	5

а) Нацртај дијаграм со точки за да ги прикажеш должините и ширините на камчињата.

б) Каква е корелацијата прикажана на дијаграмот со точки?

а)



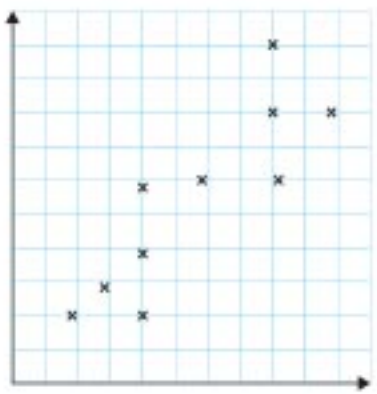
б) Дијаграмот со точки прикажува позитивна корелација.

Тоа значи дека подолгите камчиња се пошироки.

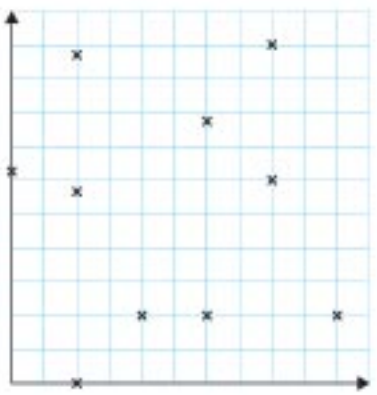
Задачи

1. Како дел од својата домашна работа, Петар ги нацртал овие дијаграми со точки.

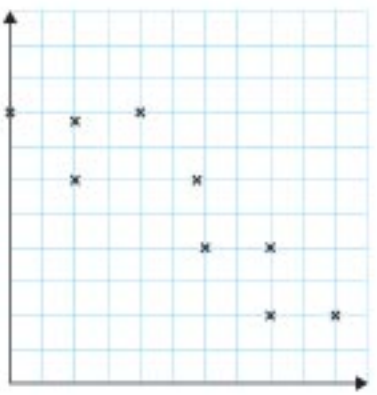
дијаграм 1



дијаграм 2



дијаграм 3

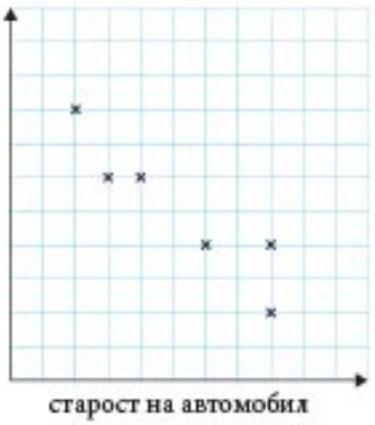


а) Кој дијаграм прикажува:

i негативна корелација

ii позитивна корелација

б) Хоризонталната оска на овој дијаграм со точки е означена како „старост на автомобил“



Со која од следниве ознаки можеш да ја означиш вертикалната оска?

големина на машина, боја, вредност, маса, должина

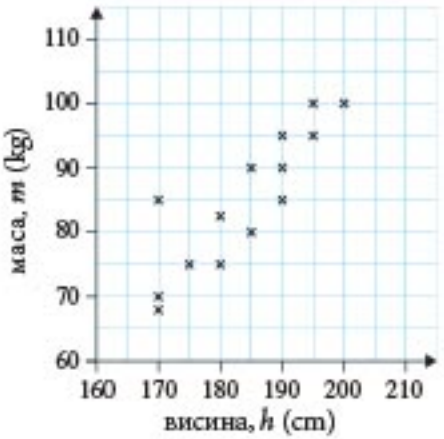
2. Во табелата е прикажан бројот на испратени текстуални пораки и бројот на повици направени од секој ученик во една група ученици.

Број на СМС-пораки	16	18	20	24	25	30	38	42
Број на повици	40	39	35	32	28	22	12	8

а) Нацртај ги податоците на дијаграм со точки.

б) Опиши ја корелацијата прикажана на дијаграмот со точки.

3. Дијаграмот со точки ги прикажува висините h, во cm, и телесните маси m, во kg, на фудбалерите од еден фудбалски клуб.



а) Колкава е телесната маса на најлесниот фудбалер?

б) Колкава е висината на највисокиот фудбалер?

в) Еден фудбалер има поголема телесна маса за својата висина. Одреди ги висината и телесната маса на овој фудбалер.

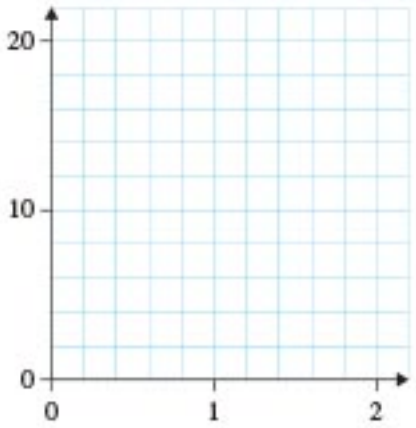
г) Одреди ја корелацијата според дијаграмот со точки.

4. Зорица ги запишала времињата на повеќе прошетки што ги направила во текот на последните неколку денови.

Растојание (km)	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3	3,5	4	4,5
Време, (минути)	6	11	12	18	25	28	32	31	27	55

а) Нацртај ги податоците на дијаграм со точки.

Користи го дадениот координатниот систем. Продолжи ја хоризонталната оска до 5, а вертикалната оска до 60.



б) Една од прошетките била искачување на многу висини.

Колку километри била долга оваа прошетка? Колку време траела оваа прошетка?

в) Одреди во каква корелација се податоците на дијаграмот со точки.

5. Во табелата се прикажани цената и староста на неколку половни автомобили.

Старост (години)	1	1	2	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Цена (денари, илјади)	15	12,5	10	9	10	7	12,5	6,5	4,5	2,5	3	2

а) Нацртај ги податоците на дијаграм со точки.

б) Одреди во каква корелација се податоците на дијаграмот со точки.

в) Еден од автомобилите припаѓа на „специјална серија".

Што мислиш, кој е тој автомобил? Објасни го твојот одговор.

6. Една автошкола собирала податоци за бројот на часови што ги имале нејзините ученици и бројот на полагања на тестот пред положување.

Број на часови	15	18	20	25	30	40	30	60	50	45	35	70	60
Број на тестови	1	1	1	2	1	3	2	1	3	3	2	5	4

а) Нацртај ги податоците на дијаграм со точки.

б) Одреди во каква корелација се податоците на дијаграмот со точки.

в) Александар сакал да знае колку часови возење му се потребни пред да го положи тестот.

Користи размери од 2 cm за 10 часа на вертикалната оска и 2 cm за секој тест на хоризонталната оска.

Кој пар вредности тој би требало да го занемари? Објасни го твојот одговор.

7. Во табелата се прикажани резултатите на два теста по математика на учениците во едно одделение.

Тест 1	25	50	35	59	45	56	28	23	32
Тест 2	30	52	40	64	48	59	30	30	83

а) Нацртај ги податоците на дијаграм со точки.

б) Еден од резултатите на тестот не бил запишан точно.

I Што мислиш, кој е тој резултат?

II Колку треба да биде тој резултат?

в) Маја била отсутна на вториот тест. Таа освоила 40 поени на првиот тест. Користи го дијаграмот за да го процениш нејзиниот резултат на вториот тест.

10.2 Експериментална веројатност

Иглата на Бифон

Оваа идеја е запишана во 1777 година од страна на Жорж Луј Леклерк, грофот од Бифон.

Потребна е игла, но можат да ја заменат и сламка или кибритче.

Нацртани се неколку паралелни отсечки, сите на еднакво растојание меѓу себе. Растојанието помеѓу соседните отсечки треба да биде еднакво на должината на иглата.

Иглата ја фрламе на рамнината на отсечките. Во тетратка запишуваме дали допира некоја од отсечките или не.

Експериментот се повторува повеќепати.

Потоа се наоѓа релативната фреквенција кога се „допира отсечка".

Ако експериментот се повтори доволен број пати, тогаш фреквенцијата може да се искористи за процена на вредноста на бројот π.

Со изведување на овој експеримент практично решаваме еден од најстарите проблеми на геометриската веројатност.



Релативна фреквенција



Кога фрламе една игличка, можни се два исхода.

Таа може да падне со врвот нагоре или со врвот надолу.

Овие исходи можат да бидат еднакво веројатни или да не бидат еднакво веројатни.

Можеме да направиме **експеримент** за да ја процениме веројатноста.

Можеме да ја фрламе игличката повеќепати и да ги запишуваме резултатите.

Секое фрлање на игличката го нарекуваме **обид**.

Потоа ќе ги користиме резултатите за да ги најдеме фреквенциите со помош на следнава формула.

$$\textbf{Релативна фреквенција} = \frac{\text{број на успешни исходи}}{\text{вкупниот број обиди}}$$

Релативната фреквенција понекогаш ја викаме **експериментална веројатност**.

Релативната фреквенција ја користиме како процена на веројатноста на исходот на настанот.

Колку е поголем бројот на обиди што се користат за процена на веројатноста, толку подобра ќе биде и проценатa.

Бројот на обиди што се потребни за да ја најдеме експерименталната веројатност зависи од бројот на можни исходи.

Бројот на обиди треба да биде околу 50 пати поголем од бројот на исходи.

На пример, кога фрламе нефер-монета со два можни исхода, треба да бидат доволни околу 100 фрлања.

Кога фрламе монета, исходите „писмо“ и „грб“ се еднакво веројатни. Кога монетата е нефер, исходите „писмо“ и „грб“ не се еднакво веројатни.

Кога експериментот го повторуваме, не треба да очекуваме да ги добиеме истите резултати.

Примена на веројатност

Кога обична коцка за играње ја фрламе голем број пати, очекуваме секој од шесте броја да падне ист број пати.

Во практика тоа не се случува.

Сите шест броја паѓаат приближно ист број пати.

На пример, ако фрламе една коцка 300 пати, очекуваме секој број да падне

$\frac{1}{6} \cdot 300 = 50$ пати

Во практика, најверојатно ќе добиеме фреквенции блиски до 50.

Ако фреквенциите се многу различни, постои можност да се посомневаме дека коцката е нефер.

Пример 1

Јована ја завртела вртелешката 150 пати. Стрелката на вртелешката застанала на црвено 40 пати.

а) Колкава е експерименталната веројатност дека стрелката на вртелешката застанала на црвено?

б) Колкава е експерименталната веројатност дека стрелката на вртелешката не застанала на црвено?

в) Вртелешката е завртена 200 пати.

Процени колку пати стрелката на вртелешката ќе застане на црвено.

а) $\frac{40}{150}$ Број на застанувања на црвено / вкупен број обиди

б) $1 - \frac{40}{150}$ P(исходот не се случил) = 1 − P(исходот се случил)

$= \frac{110}{150}$

в) $\frac{40}{150} \cdot 200$ Веројатност · број на завртувања

$= 53,(3)$

Бројот на исходи треба да биде даден како цел број.

Добра процена е дека застанала на црвено околу 53 пати.

Пример 2

Томе засадил една вреќа луковици на лалиња во различни бои во својата градина.

Сите луковици пораснале и расцветале.

Во табелата се прикажани боите што ги имаат расцветаните лалиња.

Боја	црвена	жолта	портокалова	виолетова
Фреквенција	8	32	6	4

а) Колку луковици засадил Томе?

б) Пресметај ја релативната фреквенција на секоја боја.

в) Решенијата под **б)** користи ги за да го пресметаш бројот на виолетови лалиња што ќе бидат произведени од вреќа со 240 мешани луковици.

а) $8 + 32 + 6 + 4 = 50$ лалиња

б)

Боја	црвена	жолта	портокалова	виолетова
Фреквенција	8	32	6	4
Релативна фреквенција	$\frac{8}{50}$	$\frac{32}{50}$	$\frac{6}{50}$	$\frac{4}{50}$

в) $\frac{40}{150} \cdot 240 = 19,2$

Проценатата на бројот на виолетови лалиња е 19.

Пример 3

Коцка за играње е фрлена 240 пати.

Во табелата се прикажани фреквенциите на можните исходи.

Резултат	1	2	3	4	5	6
Фреквенција	10	20	50	60	40	60

Одговори дали коцката веројатно е нефер.

Објасни го твојот одговор.

$\frac{1}{6} \cdot 240 = 40$, па можеме да очекуваме дека околу 40 пати ќе се појави секој исход.

10 е многу помал од 40, па заклучуваме дека коцката веројатно е нефер.

Ако ја фрламе коцката повеќепати, тогаш можеме да докажеме дека имаме нефер-коцка.

Задачи

1. Во еден салон за автомобили се продаваат автомобили во шест различни бои.

Во табелата се прикажани бројот на автомобили од секоја боја.

Боја	бела	сина	жолта	црна	зелена	сива
Фреквенција	11	4	2	12	5	6

а) Одреди ја релативната фреквенција за секоја боја на автомобил.

б) Менаџерот на случаен начин избрал еден автомобил. Процени ја веројатноста дека избраниот автомобил има жолта боја.

2. Бојана запишувала колку пати доцни нејзиниот автобус. Од вкупно 45 случаи, автобусот доцнел 6 пати.

а) Процени ја веројатноста дека автобусот ќе доцни утре.

б) Таа се качува на автобус 10 пати неделно. Колку пати може да очекува дека ќе доцни автобусот?

3. Една коцка за играње се фрла 20 пати.

Во табелата на фреквенција е прикажано колку пати паднал секој од броевите од 1 до 6.

Број	1	2	3	4	5	6
Фреквенција	2	6	4	7	0	1

а) Колкава е релативната фреквенција на бројот 4 за оваа коцка?

б) Ако коцката е нефер-коцка, според резултатите од табелата, процени ја веројатноста дека ќе падне 4 во следното фрлање.

в) Ако коцката е фер-коцка, запиши ја веројатноста да падне 4 во следното фрлање.

4. Веројатноста дека авионот ќе слета со задоцнување е 0,3.

Од вкупно 300 лета, колку пати се очекуваш авионот да слета со задоцнување?

5. Една компанија изработува компјутерски делови.

Тестирала 300 делови за да види колку долго ќе траат.

25 делови траеле помалку од 500 часа.

220 делови траеле помеѓу 500 и 2000 часа.

Преостанатите делови траеле повеќе од 2000 часа.

а) Процени ја веројатноста дека еден дел трае помалку од 500 часа.

б) Процени ја веројатноста дека еден дел трае повеќе од 2000 часа.

в) Една продавница порачала 4000 делови.

Процени колку од нив ќе траат повеќе од 500 часа.

6. Софија има коцка на која не паѓаат толку шестки колку што би сакала таа.

Направила експеримент за да види дали коцката е нефер во однос на шестките.

Ја фрлила коцката 100 пати и при секое фрлање запишувала дали на коцката паѓа 6 или не.

Во табелата десно се прикажани резултатите, во групи од по 10.

„6“ значи дека паднала шестка, а „Н“ значи дека не паднала шестка.

Н	Н	Н	Н	6	Н	Н	Н	6	6
Н	Н	6	Н	Н	Н	Н	Н	6	6
6	Н	Н	Н	Н	Н	Н	6	Н	Н
Н	Н	Н	Н	Н	6	Н	Н	Н	Н
Н	6	Н	Н	Н	Н	Н	Н	Н	6
Н	Н	Н	Н	Н	Н	Н	Н	6	Н
Н	Н	Н	Н	Н	Н	Н	Н	Н	Н
Н	6	Н	Н	Н	Н	Н	Н	Н	Н
Н	Н	Н	6	Н	Н	Н	Н	Н	Н
Н	Н	Н	Н	Н	Н	6	Н	Н	6

а) Пресметај ја релативната фреквенција на 6 по 10 фрлања.

б) Пресметај ја релативната фреквенција на 6 по 20 фрлања.

в) Пресметај ја релативната фреквенција за 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 и 100 фрлања.

Препиши ја и дополни ја табелата за да ги прикажеш резултатите.

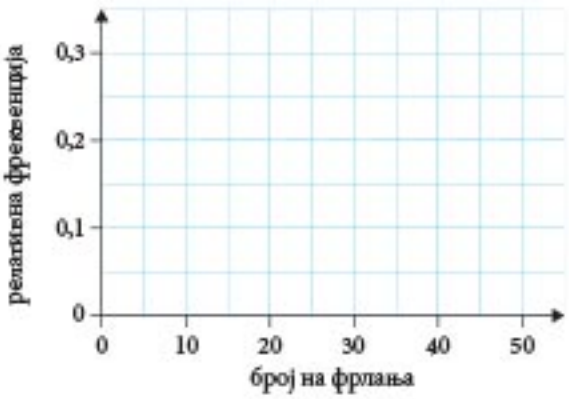
Онаму каде што е неопходно, запиши ја релативната фреквенција со две децимални места.

Број на фрлања	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Фреквенција на 6	3									
Релативна фреквенција на 6	$\frac{3}{10} = 0{,}3$									

г) Во тетратката прецртај го дадениот координатен систем.

Продолжи ја хоризонталната оска до 100.

Означи ги во координатниот систем точките од табелата.



д) Што покажува дијаграмот во врска со релативната фреквенција кога бројот на фрлања се зголемува?

ѓ) Дали сметаш дека коцката е нефер во однос на бројот 6?

Објасни го твојот одговор.

7. Дадената вртелешка има пет еднакви дела.

Ана и Селма сакаат да откријат дали вртелешката е фер.

Тие ја процениле веројатноста стрелката да застане на црвено.



а) Ана ја завртила вртелешката 10 пати.

Стрелката застанала на црвено три пати.

Колкава е релативната фреквенција на црвено по овие завртувања?

б) Селма ја завртила вртелешката 100 пати.

Стрелката застанала на црвено осум пати.

Објасни зошто резултатите на Селма би требало да дадат подобра процена на бараната веројатност.

в) Комбинирај ги резултатите на Ана и на Селма.

Користи ги комбинираните резултати за да ја процениш веројатноста стрелката да застане на црвено со оваа вртелешка.

г) Дали мислиш дека вртелешката е фер?

Користи го одговорот под **в)** за да објасниш.

8. Една четиристрана вртелешка е нефер.

За да се процени веројатноста на секој број, ако експериментот се повторува неколкупати.

Во табелата се прикажани некои од резултатите.

Број	1	2	3	4
Релативна фреквенција	0,1			0,3

Вртелешката застанува на 2, двапати почесто отколку на 3.

Вртелешката се завртува 50 пати.

Колку пати можеме да очекуваме таа да застане на 2? Покажи како одлучи.

9. На двете вртелешки се означени броеви од 1 до 4.

Табелите ги прикажуваат резултатите по 120 завртувања на секоја од вртелешките.

Запомни дека збирот на сите четири веројатности е еднаков на 1.

Вртелешка А	
Резултат	Фреквенција
1	28
2	32
3	29
4	31

Вртелешка Б	
Резултат	Фреквенција
1	24
2	23
3	25
4	48

Само една од вртелешките е фер.

Која вртелешка мислиш дека е фер? Објасни го твојот одговор.

10.3 Исходи што заемно се исклучуваат

Кога една монета ја фрламе во воздух, откако ќе падне на земја, може да се појави „писмо“ или „грб“. Двата исхода не можат да се случат истовремено. За ваквите исходи, што не можат да се случат истовремено, туку или може да се случи едниот или другиот, велиме дека **заемно се исклучуваат.**

Пример 1

Се фрла една коцка за играње.

Одреди дали исходите А и В заемно се исклучуваат или не.

Објасни го секој твој одговор.

а) А: Паднал бројот 6. В: Паднал бројот 3.

б) А: Паднал бројот 2. В: Паднал парен број.

а) Исходите заемно се исклучуваат.

Броевите 6 и 3 не можат да паднат истовремено.

б) Исходите заемно не се исклучуваат.

Парни броеви се 2, 4 и 6. Ако паднал бројот 2, тогаш тој е исто така и парен број.

Збир на веројатности на исходи што заемно се исклучуваат

Збирот на веројатностите на сите исходи што заемно се исклучуваат за секој настан е 1, бидејќи еден од исходите сигурно ќе се случи.

Вртелешката има шест дела, сите еднакви по големина.

Трите бои не се еднакво веројатни.

Веројатноста на секоја боја е:

$P(\text{црвена}) = \frac{2}{6}$ $P(\text{бела}) = \frac{1}{6}$ $P(\text{сина}) = \frac{3}{6}$

P(црвена) ја означува веројатноста дека вртелешката ќе застане на дел со црвена боја.



Освен овие три бои, на вртелешката нема други бои, па кога ќе се заврти, таа сигурно ќе застане на една од овие бои.

Тоа значи дека збирот на трите веројатности е 1.

Ако ја знаеме веројатноста на два од овие исходи, лесно можеме да ја најдеме веројатноста на третиот исход.

Пример 2

Андреа има вртелешка со четири бои.

Во табелата се прикажани веројатностите на три бои.

Боја	црвена	бела	жолта	зелена
Веројатност	0,1	0,25	0,4	

Колкава е веројатноста вртелешката да застане на зелена боја?

Исходите заемно се исклучуваат.

Не постои друга можна боја.

Затоа збирот на четирите веројатности е 1.

P(црвена, бела или жолта) = 0,1 + 0,25 + 0,4 = 0,75.

P(зелена) = 1 – 0,75

= 0,25.

Задачи

1. Се фрла една коцка за играње.

Дали исходите А и В заемно се исклучуваат?

Објасни го секој твој одговор.

а) А: Паднал бројот 4. В: Паднал број помал од 5.

б) А: Паднал парен број. В: Паднал непарен број.

в) А: Паднал парен број. В: Паднал број поголем од 4.

2. Бојан има кутија со џамлии.

Во кутијата има црвени, жолти, сини и зелени џамлии.

Во табелата е прикажана веројатноста за избор на црвена, жолта или сина џамлија.

Боја	црвена	жолта	сина	зелена
Веројатност	0,1	0,4	0,2	

Колкава е веројатноста дека Бојан ќе избере една зелена џамлија?

3. Во една кутија има неколку дискови.

Дисковите се означени со броевите 1, 2, 3, 4 или 5.

Од кутијата на случаен начин се избира еден диск.

„На случаен начин" значи дека секој диск има еднаква веројатност да биде извлечен.

а) Препиши ја и дополни ја табелата со веројатности да биде избран секој број.

Број	1	2	3	4	5
Веројатност	0,15	0,25	0,1		0,35

б) Која веројатност е поголема, да се извлече диск означен со непарен број или со парен број?

4. Во една кутија има само црвени, жолти и портокалови бонбони.

Од кутијата на случаен начин се зема една бонбона.

Во табелата се прикажани веројатноста за избор на црвена бонбона и веројатноста за избор на жолта бонбона.

Бонбона	црвена	жолта	портокалова
Веројатност	0,2	0,35	

Колкава е веројатноста да се земе една портокалова бонбона?

5. Кога една монета се фрла во воздух, откако ќе падне на земја, на горната страна може да се појави „писмо“ (П) или „грб“ (Г).

Истовремено во воздух се фрлаат две монети.

Има четири можни исходи: ПП, ПГ, ГП и ГГ.

а) Колку можни исходи има, ако истовремено се фрлат три монети?

б) Колкава е веројатноста дека сите три парички паднале на иста страна?

6. Во две кутии има црвени и жолти џамлии.

Двете кутии содржат ист број џамлии.

Веројатноста да се избере една црвена џамлија од кутијата А е 0,5.

Избери вредност за бројот на џамлии во секоја кутија. Внимавај, треба да добиеш цел број кога ќе ја помножиш таа вредност со 0,5 и со 0,2.

Веројатноста да се избере една црвена џамлија од кутијата Б е 0,2.

Сите џамлии од двете кутии се префрлаат во трета кутија В.

Колкава е веројатноста да се една избере црвена џамлија од кутијата В?

7. Секој ден мајката на Тео му дава овошје од садот со овошје.

Во табелата е прикажана веројатноста за избор на секој вид овошје од садот со овошје.

Овошје	јаболко	круша	банана	портокал
Веројатност	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	

Колкав е најмалиот број портокали што може да ги има во садот со овошје?

Објасни го решението.

Одреди ја прво веројатноста да се избере еден портокал. Потоа одреди го најмалиот заеднички содржател на именителите.

8. Повеќе карти со слики се користат во една детска игра.

Во табелата се прикажани веројатностите за избор на карта со слика од автобус, со слика од автомобил и со слика од скутер.

Слика	автобус	автомобил	велосипед	скутер
Веројатност	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$

а) Колкава е веројатноста да се избере карта со слика од велосипед?

б) Кој исход е најверојатен?

в) Колкава е веројатноста да не се избере карта со слика од автобус?

г) По одреден број играња, картата со слика од скутер била избрана 15 пати.
Колку пати се играла играта?

10.4 Табела на исходи

Сите можни исходи на два последователни настани можеме да ги запишеме во табела.
Оваа табела на сите можни исходи ја нарекуваме **табела на исходи**.

Пример 1

Истовремено се фрлаат една црвена и една сина коцка за играње.

Прикажи ги сите можни исходи во табела на исходи.

		црвена коцка					
		1	2	3	4	5	6
сина коцка	1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
	2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
	3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
	4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
	5	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
	6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)

Пример 2

Истовремено се фрлаат две фер-коцки за играње, едната црвена, а другата сина.

Фер-коцка значи дека секој број на коцката е еднакво веројатен.

Броевите што паднале на горната страна на двете коцки, се собираат.

а) Прикажи ги сите можни исходи во табела на исходи.

б) Користи ја табелата за да ја одредиш веројатноста за добивање:

I збир еднаков на 3

II збир еднаков на 12

III збир поголем од 6.

в) Кој вкупен збир е најверојатен?

а)

		сина коцка					
		1	2	3	4	5	6
црвена коцка	1	2	(3)	4	5	6	7
	2	(3)	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

б) I $P(\text{збир еднаков на 3}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

Броиме колку пати се појавува бројот 3 во табелата (прикажани заокружени).

II $P(\text{збир еднаков на 12}) = \frac{1}{36}$

Делиме со вкупниот број можни исходи.

III $P(\text{збир поголем од 6}) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$

Ја упростуваме дропката, ако е можно.

в) Најверојатен збир е 7. Има шест начини на кои може да се добие збир 7.

Задачи

1. Една монета и една коцка се фрлаат истовремено.

Препиши ја и дополни ја табелата на исходи за да ги прикажеш сите можни исходи.

		коцка					
		1	2	3	4	5	6
монета	П	П, 1					
	Г						

2. Истовремено се фрлаат две фер-коцки.

Броевите што паднале на горната страна на двете коцки, се множат.

а) Прикажи ги сите можни исходи во табела на исходи.

б) Колкава е веројатноста да се добие производ 10 или помал од 10?

в) Колкава е веројатноста да се добие производ поголем од 20?

г) Колкава е веројатноста да се добие производ – парен број?

3. Во една игра истовремено се фрлаат две фер-коцки.

Броевите што паднале на горната страна на коцките, се одземаат.

Во табелата на исходи се прикажани неколку такви разлики.

		коцка 1					
		1	2	3	4	5	6
коцка 2	1	0	1	2			
	2	1	0				
	3	2					
	4						
	5						
	6						

а) Како може да се добие разлика 0?

б) Прецртај ја и дополни ја табелата на исходи.

в) Колкава е веројатноста да се добие разлика 1?

г) Колкава е веројатноста да се добие разлика парен број?

д) Колкава е веројатноста да се добие разлика помала од 4?

ѓ) Која разлика има веројатност $\frac{1}{18}$?

4. На една тристрана фер-вртелешка се запишани броевите 1, 3 и 5.

Истовремено се завртува вртелешката и се фрла една фер-коцка.

Го запишуваме збирот на двата добиени броја.

Во табелата на исходи се прикажани некои од збировите.

		коцка					
		1	2	3	4	5	6
вртелешка	1	2	3				
	3	4					
	5						11

а) Препиши ја и дополни ја табелата на исходи.

б) Колкава е веројатноста да се добие збир 9?

в) Колкава е веројатноста да се добие збир помал од 6?

5. Во една кутија има пет диска.

Дисковите се означени со броевите 2, 4, 6, 8 или 10.

Од кутијата без гледање се избира еден диск.

Потоа тој се враќа назад во кутијата.

Од кутијата без гледање се избира втор диск.

Го запишуваме збирот од броевите на двата диска.

Во табелата на исходи се прикажани некои од збировите.

		диск 1				
		2	4	6	8	10
диск 2	2	4	6	8		
	4	6	8			
	6	8				
	8					18
	10				18	20

а) Препиши ја и дополни ја табелата на исходи.

б) Колкава е веројатноста дека збирот е 16?

в) Што е поголемо – веројатноста дека збирот е полн квадрат или веројатноста дека збирот е полн куб?

Објасни го решението.

16 е полн квадрат бидејќи $4 \cdot 4 = 16$.
27 е полн куб бидејќи $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

6. Две фер-вртелешки ги прикажуваат броевите 0, 1 и 2.

Се завртуваат двете вртелешки.

Го запишуваме производот на двата добиени броја.

Во табелата на исходи се прикажани некои од можните производи.

		вртелешка 1		
		0	1	2
вртелешка 2	0	0		
	1			2
	2		2	4

а) Препиши ја и дополни ја табелата на исходи.

б) Марија вели: „Има само четири производи, еден од нив е 0. Според тоа, веројатноста за добивање производ = 0 е $\frac{1}{4}$.“

Објасни зошто Марија згрешила.

Размисли на колку начини се добиваат производите.

Задачи за повторување

1. Марко вели: „Кога работат помалку каси во супермаркетот, јас морам да чекам подолго“.

За да провери дали е во право, тој ги собрал следниве податоци:

Број на каси што работат	3	4	8	6	12	5	10	9
Време на чекање (минути)	4	3	5	8	2	3	5	4

а) Нацртај дијаграм со точки за да ги прикажеш податоците.

б) Дали мислиш дека Марко е во право? Објасни го твојот одговор.

2. Еден автомобил на случаен начин е избран на еден паркинг.

Утврди дали исходите А и В заемно се исклучуваат или не.

Објасни го твојот одговор.

а) А: Автомобилот има волан на левата страна. В: Автомобилот има волан на десната страна.

б) А: Автомобилот е црвен. В: Автомобилот е син.

в) А: Автомобилот има седишта напред В: Автомобилот има седишта назад.

3. Една коцка за играње е нефер-коцка.

Во табелата се прикажани веројатностите за паѓање на 1, 2, 3, 4 и 5, при фрлање на коцката.

Резултат	1	2	3	4	5	6
Веројатност	0,15	0,1	0,05	0,1	0,2	

Одреди ја веројатноста да падне 6.

4. Јусуф прави сендвичи и ги продава во својата сендвичарница.

Во табелата се прикажани веројатностите за продажба на секој вид од сендвичите што ги прави.

Сендвич	со плескавица	со туна	со салата	со јајце	со салама
Веројатност	0,3	0,41	0,1	0,25	0,2

а) Дали има грешка во табелата?

б) Веројатноста за сендвич со туна не е точна.

Колкава треба да биде оваа веројатност?

в) Јусуф направил 200 сендвичи за да ги продава во својата сендвичарница.

Колку од нив би можело да се очекува да бидат со плескавица?

5. Една вртелешка има три еднакви дела.

Деловите се обележени со броевите 3, 4 или 5.

Вртелешката се завртува двапати.

Го запишуваме збирот на двата добиени броја.

а) Препиши ја и дополни ја табелата на фреквенција за да ги прикажеш можните збирови.

		второ завртување		
		3	4	5
прво завртување	3			
	4			
	5			

б) Колкава е веројатноста да се добие збир 8?

в) Колкава е веројатноста да се добие збир непарен број?

6. Зерина ја фрлила шајката 120 пати.

Таа паднала со врвот нагоре 35 пати.

а) Колкава е релативната фреквенција дека шајката ќе падне со врвот нагоре?

б) Зерина планира да ја фрли шајката 500 пати.

Колку пати може да се очекува дека шајката ќе падне со врвот нагоре?

7. Три ученички од одделението направиле по една сопствена коцка.

Секоја ја фрлала својата коцка за да ја тестира дали е фер или не, и ги запишувала резултатите.

Во табелата се прикажани резултатите на трите ученички.

	1	2	3	4	5	6
Ања	20	20	20	20	20	20
Бојана	9	11	12	8	9	11
Ема	14	16	12	11	12	25

Одговори ги следниве прашања. Објасни го секој твој одговор.

а) Која ученичка направила коцка што веројатно е фер?

б) Која ученичка направила коцка што веројатно не е фер?

в) Која ученичка изгледа мами и воопшто не ја фрлила коцката?

Број и решавање проблеми

1. Препиши ги изразите. На празните места запиши ги броевите што недостигаат.

а) $17{,}26 \cdot 1000 = \ldots\ldots$

б) $3{,}8 : \ldots\ldots = 0{,}038$

2. Пресметај: $34{,}2 : 6$

3. Даден е производот:

$37 \cdot 291 = 10767$

Пресметај:

а) $3{,}7 \cdot 2{,}91$

б) $107{,}67 : 0{,}37$

4. Дадени се следните броеви:

0,01 0,1 1 10 100

Искористи четири од овие броеви за да бидат точни следните тврдења.

Секој од броевите смееш да го користиш најмногу еднаш.

$24 \cdot \ldots = 24 : \ldots$

$24 : \ldots = 24 \cdot \ldots$

5. Дадена е дропката:

$$\frac{26{,}3 + 47{,}9}{107{,}4 - 3{,}29}$$

а) Пресметај го резултатот со калкулатор.

Запиши ги сите цифри добиени на калкулаторот.

б) Решението заокружи го на 3 децимални места.

6. Препиши ги изразите. Запиши броеви во празните полиња за да добиеш точни равенства.

а) $4{,}68 : 0{,}8 = 4{,}68 \cdot \square : 8$

б) $56{,}3 \cdot \square = 56{,}3 \cdot 7 : 100$

7. Препиши ги изразите. Запиши броеви на празните места за да добиеш точни равенства.

а) $265 \cdot ... = 2{,}65$

б) $45{,}8 : ... = 458$

8. Ова е дел од домашната работа по математика на Никола:

$263 \cdot 1{,}15 = 241$

Никола згрешил.

Објасни како можеш да кажеш дали тој згрешил без да го пресметуваш точното решение.

9. Запиши го експонентот што недостига: $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^{\square}$

10. Пресметај ја вредноста на $5^3 + 13^2$

11. Пресметај ја вредноста на:

а) 2^{-1} **б)** 2^4

12. Упрости ги изразите. Решенијата запиши го во вид на степен.

а) $x^3 \cdot x^{-5} : x^4$

б) $(y^3)^5 : y^4$

13. Дадена е низата броеви.

2, 6, 7, 9, 16, 24, 30, 60

Пополни ги празните места со броеви од низата за да бидат точни тврдењата:

а) _____ и _____ се делители на 12.

б) _____ и _____ се содржатели на 15.

в) _____ и _____ се прости броеви.

г) _____ и _____ се полни квадрати.

14. Запиши ја дропката $\frac{45}{54}$ како нескратлива дропка.

15. Запиши ја дропката $\frac{26}{7}$ како мешан број.

16. Пресметај $\frac{1}{6}$ од 84.

17. Препиши го и дополни го изразот со еден од знаците: = , < или >.

$\frac{15}{100} \square \frac{1}{5}$

18. Запиши ги сите дропки што меѓу себе се еквивалентни.

$\frac{7}{27}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{32}{40}$, $\frac{28}{32}$, $\frac{20}{25}$

19. Пресметај $2\frac{1}{3} + 1\frac{2}{5}$

20. Пресметај $\frac{2}{5}$ од 75.

21. Пресметај $\frac{3}{5}$ од $\frac{4}{7}$.

22. Препиши го изразот и запиши дропка на празното место за да добиеш точно равенство.

$2\frac{1}{3} \cdot \square = 5\frac{5}{6}$

23. Пресметај: **а)** 4^3 **б)** $\sqrt{324}$

24. Пресметај ја вредноста на:

а) $\sqrt[3]{125}$ **б)** 8^0

25. Избери соодветен збор за да бидат точни тврдењата.

куб **квадратен корен** **квадрат** **кубен корен**

а) _____ од 14 е 196

б) _____ од 125 е 5

26. Употреби загради за да биде точно следното равенство.

$7 \cdot 2 + 1 - 4 = 17$

27. Пресметај:

а) $(4 + 17) \cdot 5 - 3$

б) $4^2 + 48 : (4^2 - 4)$

28. Алек ја мерел висината на едно растение.

На почетокот од првата недела растението било високо 36 mm.

Една недела подоцна тоа е високо 63 mm.

Пресметај за колку проценти се зголемила висината на растението.

29. Зина има заштеда од 1500 денари на својата банкарска сметка.

Банката пресметува проста каматна стапка од 4% годишно.

Пресметај ја вкупната сума пари на нејзината сметка на крајот од годината.

30. Во еден ресторан, на сметката се додаваат 15% надоместок за услуги.

Колку изнесува надоместокот за услуги на сметка од 450 денари?

31. Фахрета купила нов автомобил.

Автомобилот губи 23% од својата вредност по првата година.

На крајот од првата година автомобилот на Фахрета вредел 657580 денари.

Колкава сума платила Фахрета за автомобилот?

Покажи како дојде до решението.

32. Александар измешал црвена со бела боја во сооднос 5 : 1.

а) Пресметај колку црвена боја треба да измеша со 2 литра бела боја.

б) Пресметај колку бела боја треба да измеша со 2,5 литра црвена боја.

33. Во еден воз соодносот на возрасни лица и деца е 4 : 3.

Во возот се возат 120 деца.

Пресметај колку вкупно луѓе има во возот.

34. Запиши го размерот 63 : 35 : 49 во неговата најпроста форма.

35. Алек измешал 2,4 kg чакал, 1,5 kg песок и 600 g цемент.

Запиши го размерот: чакал : песок : цемент во неговата најпроста форма.

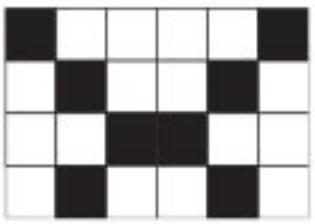
36. Девизниот курс помеѓу хрватската куна и македонскиот денар е 1 куна = 8,14 денари.

а) Претвори 250 куни во денари.

б) Претвори 7500 денари во куни.

Заокружи ги решенијата на две децимални места.

37. На цртежот е прикажана шема од црни и бели квадрати.



Запиши го размерот црни квадрати : бели квадрати во неговата најпроста форма.

38. Дадени се состојките за правење колачиња.

Ова е рецепт за 12 колачиња.

а) Петар сака да направи 24 колачиња.

Колку шеќер ќе му биде потребен?

б) Слаѓана подготвува колачиња за 6 луѓе.

Колку путер ќе ѝ биде потребен?

в) Гордана подготвува колачиња за 20 луѓе.

Пресметај колку брашно ќе ѝ биде потребно.

Рецепт за колачиња

180 g брашно
60 g шеќер
120 g путер

за 12 колачиња

39. Лимонада се прави со мешање лимонов сок и вода во сооднос 2 : 7.

а) Пресметај колку вода треба да се измеша со 800 ml лимонов сок.

б) Даниела сака да направи 36 литри лимонада за забавата.

Пресметај колку литри лимонов сок ѝ се потребни.

40. Дадени се четири размери:

9 : 21 30 : 80 24 : 56 60 : 140

Три од овие размери се еквивалентни.

Пресметај кој е размерот што се разликува од другите три размери.

41. Девизниот курс меѓу американскиот долар ($) и еврото (€) е 1$ = 0,90€.

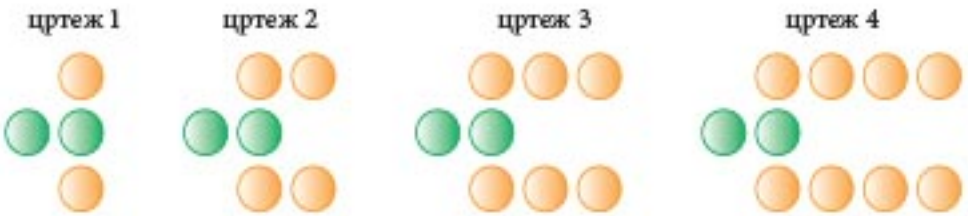
а) Претвори 420$ во евра.

б) Претвори 160 € во долари. Решението заокружи го на две децимални места.

42. **а)** Одреди го следниот член на низата 4, 7, 10, 13, ...

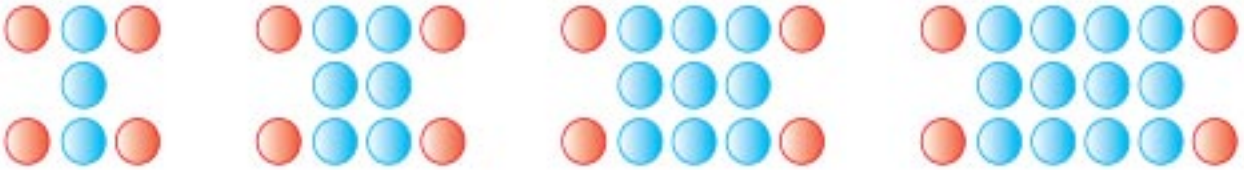
б) Одреди го следниот член на низата 25, 18, 11, 4, ...

43.



Нацртај го следниот цртеж на низата.

44. цртеж 1 цртеж 2 цртеж 3 цртеж 4



а) Препиши ја и дополни ја табелата на низата цртежи.

Цртеж	1	2	3	4	5	6
Број на кругови	7	10				

б) Запиши го правилото „за одредување следен член“ на низата за бројот на кругови.

в) Запиши формула за бројот на кругови во n-тиот цртеж.

г) Најди го бројот на кругови во цртеж 40.

д) Еден цртеж на низата има 232 круга.

Одреди ја вредноста на n за овој цртеж.

45. Дадена е низата: 5, 10, 20, 40, ...

а) Запиши го со зборови правилото „за одредување следен член“ на низата.

б) Одреди го следниот член на низата.

46. Одреди ги следните два члена на низата 29, 26, 21, 14, 5, ...

47. Пресметај ги првите три члена на низата чиј n-ти член е $n^2 + 5$.

48. Одреди го n-тиот член на следниве низи.

а) 3, 6, 9, 12, …

б) 17, 14, 11, 8, …

49. Одреди го n-тиот член на следниве низи.

а) 1, 4, 9, 16, …

б) 1, 8, 27, 64, …

50. цртеж 1 цртеж 2 цртеж 3 цртеж 4



а) Нацртај го цртежот 5.

б) Препиши ја и дополни ја табелата за низата од цртежи.

Цртеж, *n*	1	2	3	4	5
Број на кругови	$2 = 1 \cdot 2$	$6 = 2 \cdot 3$	$12 = 3 \cdot 4$		

в) Запиши го правилото за наоѓање на бројот на кругови во цртежот n.

51. Растојанието меѓу Берово и Струга е околу 195,73 милји.

Пресметај колку километри има од Берово до Струга.

Алгебра и решавање проблеми

1. $p = 5r$

Пресметај го p кога $r = 4{,}5$.

2. $L = 2a + 2b$

Пресметај го L кога $a = 6$ и $b = 9$.

3. $E = \frac{1}{2}mv^2$

а) Пресметај го E кога $m = 7$ и $v = 12$.

б) Пресметај го v кога $E = 32$ и $m = 9$.

в) Изрази го m од формулата.

4. $P = 2\pi rh + 2\pi r^2$

Пресметај го P кога $r = 3$ и $h = 7$.

Решението заокружи го на 3 значајни цифри.

5. Едно лижавче чини x денари, а еден сладолед чини y денари.

Запиши формула за вкупната цена T што треба да се плати за 3 лижавчиња и 5 сладоледи.

6. Изрази го f од формулата $g = 5f - 6$.

7. Изрази го R од формулата $V = IR$.

8. Изрази го x од формулата $2(x - y) = 7y + 8$.

9. Изрази го h од формулата $g = \sqrt{h + 2}$.

10. Изрази го x од формулата $y = \frac{5x}{2} + 3$.

11. Изрази го P од формулата $Q = \frac{2}{P + 1}$.

12. Изрази го r од формулата $P = \frac{3\pi r^2}{2}$.

13. Едно пенкало чини 75 денари.

Запиши израз за вкупната цена на x пенкала.

14. Упрости го изразот:

$5x + 7y + 3x - 4y$

15. Пресметај ја вредноста на:

$7x - 3y$ кога $x = 2$ и $y = -4$

16. Една книга чини 70 денари, а едно списание чини 30 денари.

Запиши израз за пресметување на вкупната сума што треба да се плати за b книги и m списанија.

17. Ослободи се од заградите во изразот: $4\,(x - 6)$.

18. Ослободи се од заградите и упрости:

$7(3x - 2) - 2(4x - 3)$.

19. Вкупната маса за x колачи е 250 g.

Запиши израз со кој ќе се пресмета масата на едно колаче.

20. Ослободи се од заградите и упрости: $(x + 8)(x - 5)$.

21. Упрости:

а) $m^5 \cdot m^3$

б) $p^8 : p^2$

в) $2x^3y^4 \cdot 3x^2y^3$.

22. Упрости го изразот: $\frac{x}{3} + \frac{2x}{9}$.

23. Разложи ги на множители изразите:

а) $8x + 24$

б) $x^2 - 7x$.

24. Одреди го коефициентот на правец на правата што минува низ точките $(5, -2)$ и $(3, 8)$.

25. Дополни ја табелата на вредности за $y = 2x + 3$ и нацртај го нејзиниот график.

x	−2	0	1
y			

26. Нацртај ги графиците на правите:

а) $y = 3$

б) $y = 2x$

в) $5x + 2y = 10$.

27. Одреди ги координатите на точката во кои правата $y = 3x + 4$ ја сече y-оската.

28. Одреди го коефициентот на правец на правата $y = 4x + 2$.

29. Правата $y = 2x + 5$ ја сече правата $y = 2$ во точката P.
Одреди ги координатите на P.

30. Одреди ја инверзната функција на функцијата $x \to 2x + 7$.

31. Реши го графички системот равенки. Решенијата заокружи ги на едно децимално место.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 15 \\ 2x - 3y = -6 \end{cases}$$

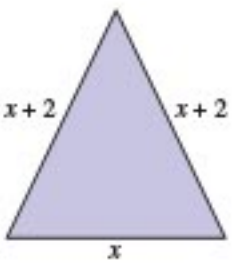
32. y е правопропорционален на x.
$y = 5$ кога $x = 25$
Одреди ја вредноста на y кога $x = 9$.

33. Реши ја равенката: $2x + 7 = 19$.

34. Реши ја равенката: $\frac{8 - x}{3} = 6$.

35. Реши ја равенката: $4(x - 1) + 3(x + 2) = 30$.

36. Периметарот на триаголникот на цртежот е 50 cm.
Запиши равенка по x и реши ја.



37. Знаеме дека $7 < 2x \leq 14$.
Ако x е цел број, запиши ги сите можни вредности на x.

38. **а)** Реши ја неравенката $7x > 5x - 6$.

б) Прикажи го решението на бројна оска.

39. Зорица го користи методот на обиди и грешки за да ја реши равенката $x^3 + 2x = 26$

Табелата ги прикажува нејзините први две процени.

Процена	$x^3 + 2x$	Коментар
2	$2^3 + 2 \cdot 2 = 12$	премало
3	$3^3 + 2 \cdot 3 = 33$	преголемо

Продолжи со пополнување на табелата за да го најдеш решението на равенката.

Заокружи го решението на 1 децимално место.

40. Реши го системот равенки.

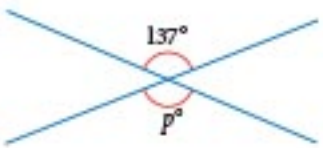
$$\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$$

41. Реши го системот равенки.

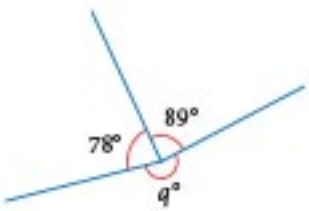
$$\begin{cases} 5x + 3y = 6 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

Геометрија и решавање проблеми

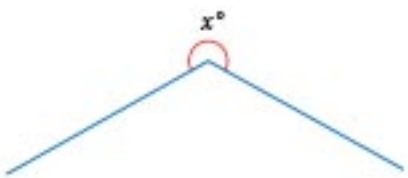
1. **а)** Запиши ја големината на аголот $p°$ во степени.



б) Пресметај ја големината на аголот $q°$ во степени.

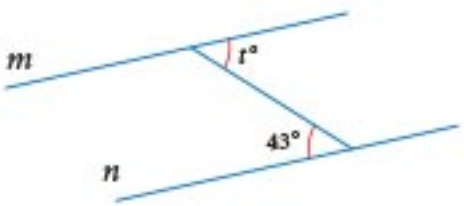


2. **а)** Од кој вид е аголот $x°$?

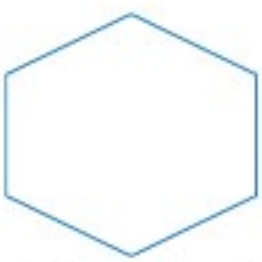


б) Препиши и дополни.

$t°$ = ____ бидејќи _____



3.

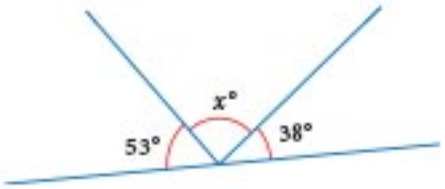


а) Како се вика 2Д-формата на цртежот?

б) Пресметај го збирот на внатрешните агли на 2Д-формата на цртежот.

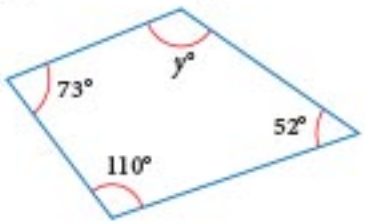
4. **а)** Препиши и дополни.

$x° =$ ____ бидејќи _____

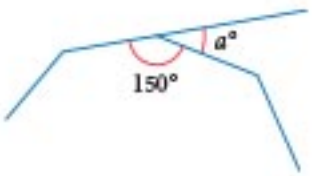


б) Препиши и дополни.

$y° =$ ____ бидејќи _____



5. На цртежот е прикажан дел од правилен многуаголник.



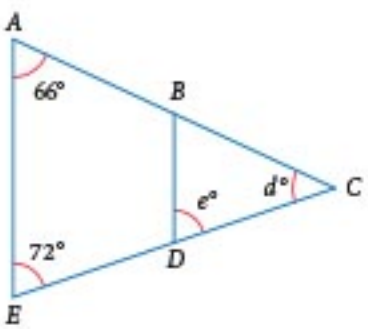
а) Запиши ја големината на аголот $a°$.

б) Пресметај го бројот на страни на многуаголникот.

6. На цртежот е прикажан триаголникот ACE.

$\overline{BD}$ е паралелна на $\overline{AE}$.

$\sphericalangle BAE = 66°$, $\sphericalangle AED = 72°$



Пресметај го:

а) $\sphericalangle BCD$

б) $\sphericalangle BDC$.

Објасни ги добиените решенија.

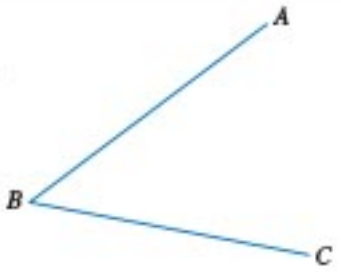
7. Секој внатрешен агол на правилен петаголник има 108°.

Со линијар и агломер конструирај правилен петаголник со страна 4 cm.

8. Прецртај го цртежот во тетратка.

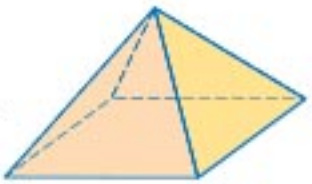
Со помош на линијар и шестар подели го аголот на два еднакви агли.

Конструирај симетрала на даденият агол.



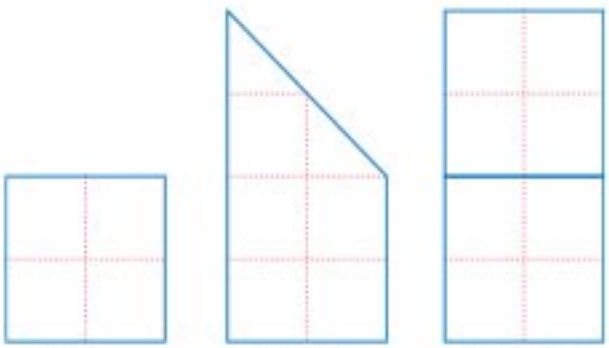
9. **а)** Запиши го математичкото име на 3Д-формата на цртежот.

б) Одреди колку рамнини на симетрија има 3Д-формата.



10. Со линијар и шестар конструирај правилен шестаголник со страна 5 cm.

11. На цртежот се прикажани планот и проекциите на една 3Д-форма.



Нацртај ја 3Д-формата на изометриска хартија.

12. На цртежот е прикажана основата на една стара палата.

Формата на основата е правоаголник со димензии 700 m и 400 m.

а) Нацртај прецизен цртеж во размер на основата на палатата.

Користи размер: 1 cm одговара на 50 m.

Старата мапа на закопано богатство покажува дека нешто е закопано во земјата.

Тоа место е со азимут од 115° од бунарот.



Тоа место е на азимут од 340° од тврдината.

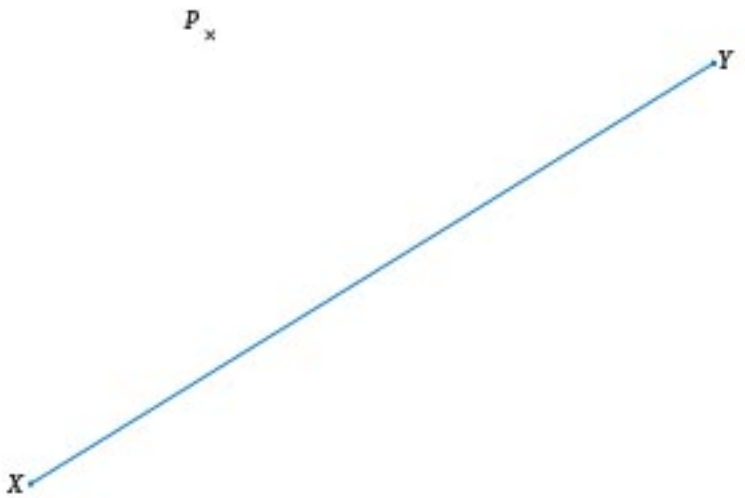
б) Нацртај права од бунарот со азимут од 115°.

в) Нацртај права од тврдината со азимут од 340°.

г) Со „×“ означи го местото каде што се наоѓа закопаното богатство.

13. Запиши го името на 3Д-формата што има шест ѕида што се квадрати.

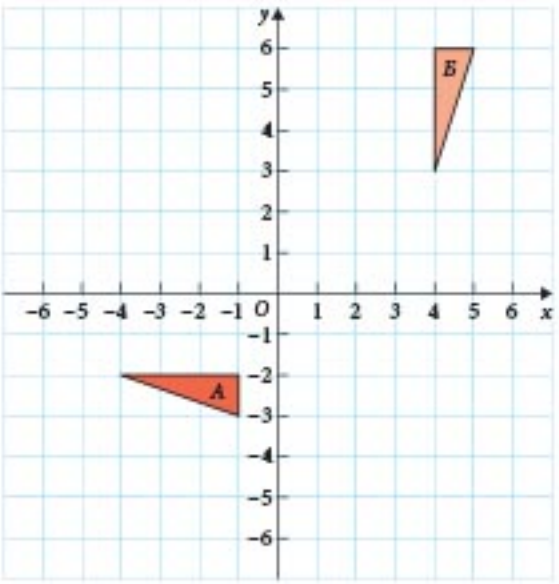
14. Прецртај го цртежот во тетратка. $\overline{XY}$ е долга 10 cm.



Со помош на линијар и шестар конструирај нормала од точката P кон отсечката $\overline{XY}$.

Нормала е права што е нормална на друга права.

Прецртај ја квадратната координатна мрежа за да ги реши задачите **15** *и* **16**.



15. **а)** Одреди ја точката (4, 2). Означи ја со буквата P.

б) Одреди ја точката (−4, 4). Означи ја со буквата Q.

в) Одреди ги координатите на средната точка на $\overline{PQ}$.

16. **а)** Ротирај го триаголникот А за 90° околу (0, 0), во насока обратна од насоката на движење на стрелките на часовникот.

Означи го добиениот триаголник В.

б) Детално опиши ја единствената трансформација од триаголникот Б во триаголникот В.

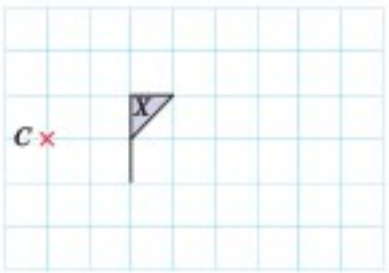
17. Прецртај го четириаголникот во тетратка со квадратчиња.



Нацртај мозаик од овој четириаголник.

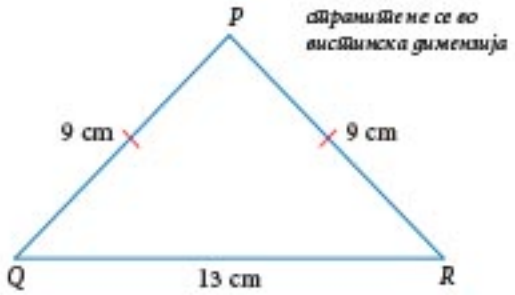
Нацртај барем уште пет 2Д-форми.

18. Прецртај го цртежот во тетратка со квадратчиња.



Зголеми ја 2Д-формата X со коефициент 3 и центар на зголемување C.

19. PQR е рамнокрак триаголник со $\overline{QR}$ = 13 cm и $\overline{PQ}$ = $\overline{PR}$ = 9 cm.



а) Конструирај прецизен цртеж на триаголникот PQR.

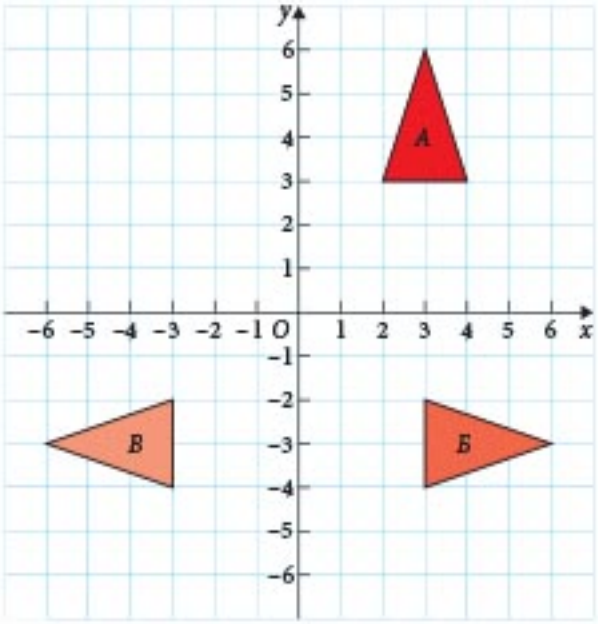
б) Нацртај геометриско место на точки што се оддалечени 3,5 cm од страната $\overline{PQ}$.

в) Нацртај геометриско место на точки што се оддалечени 5 cm од точката P.

г) Означи со X точката на пресек на двете геометриски места на точки.

Измери го растојанието $\overline{XR}$.

20. На цртежот се прикажани три триаголници A, Б и В.



Детално опиши ја трансформацијата од:

а) триаголник A во триаголник Б.

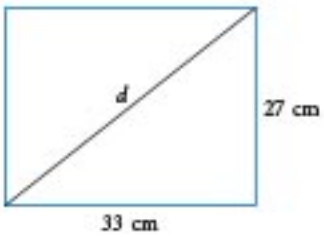
б) триаголник Б во триаголник В.

Решенијата треба да бидат заокружени до 3 значајни цифри, освен ако не е поинаку нагласено во задачата.

21. Правоаголен телевизиски екран има димензии 33 cm и 27 cm.

Пресметај ја должината на дијагоналата d.

Заокружи го резултатот на најблискиот милиметар.



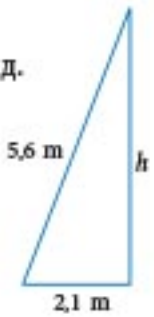
22. На цртежот е прикажана скала долга 5,6 метри, потпрена на вертикален ѕид.

Основата на скалата е оддалечена 2,1 метри од ѕидот.

Подот на кој е поставена скалата е хоризонтален.

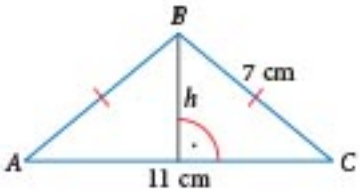
Која височина ја достига горниот дел од скалата потпрен на ѕидот?

Заокружи го резултатот на најблискиот милиметар.



23. ABC е рамнокрак триаголник.

$\overline{AB} = \overline{BC} = 7$ cm и $\overline{AC} = 11$ cm

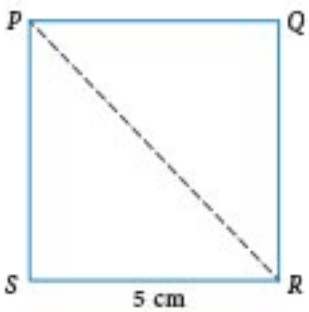


а) Пресметај ја висината h на триаголникот.

б) Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC.

24. $PQRS$ е квадрат со страна 5 сантиметри.

Пресметај ја должината на дијагоналата на квадратот.



25. Вертикалниот јарбол е висок 28 метри.

Тој е поставен на хоризонтална подлога.

Обезбеден е со челични жици што се протегаат од горниот дел на јарболот до подлогата.

Една од тие жици е прикажана на цртежот.

Секоја жица е закачена на подлогата во точка оддалечена 12,5 метри од основата на јарболот.

Пресметај ја должината на секоја од жиците.

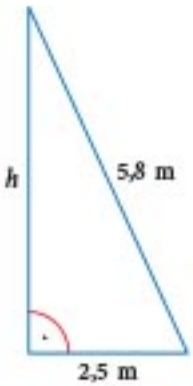


26. На цртежот е прикажано едрото на една јахта.

Едрото е правоаголен триаголник.

Пресметај ја должината на страната h.

Заокружи го резултатот на најблискиот сантиметар.



Мерење и решавање проблеми

1. Препиши ги и дополни ги следните тврдења.

а) 4520 милилитри = ... литри.

б) 432 милиметри = ... сантиметри.

в) 7,4 тони = ... килограми.

2. **а)** Во една фабрика се произведуваат машини за перење, од кои секоја има маса од 62 килограми.

Пресметај ја вкупната маса на 36 такви машини за перење.

Решението запиши го во тони.

б) Еден камион може да прими товар, максимално, од 10 тони.

Колку машини за перење можат да бидат натоварени во камионот?

3. Андреј има бокал што содржи 2,4 литра јаболков сок.

Тој го поделил еднакво во 6 чаши.

Пресметај колку милилитри јаболков сок има во секоја чаша.

4. Лејла купила лента за завеса долга 2,4 метра.

Нејзе ѝ треба лента долга 1,95 метри за нејзиниот прозорец.

Пресметај колку сантиметри треба да отсече од лентата што ја купила за да одговара на нејзиниот прозорец.

5. Подреди ги следните должини, почнувајќи од најмалата.

0,28 m 29 mm 27 cm 2,8 m 285 mm

6. Препиши и дополни.

а) 12,3 литри = ... милилитри.

б) 32,6 килограми = ... грама.

в) 4235 сантиметри = ... метри.

7. Марко измерил една книга на вага.

На сликата е прикажана вагата.



а) Запиши ја масата на книгата во грами.

Марко сакал да спакува 7 такви книги за да ги испрати како поштенска пратка.

б) Пресметај ја вкупната маса на сите 7 книги во килограми.

8. Пред локалното кино е поставен следниот натпис.



а) Претвори го времето во 12-часовен формат.

б) Пресметај во колку часот ќе заврши филмот.

Решението запиши го во 24-часовен формат.

9. Автомобил изминал 400 метри за 21,5 секунди.

Пресметај ја неговата средна брзина, заокружена на 1 децимално место.

10. Во табелата се дадени времињата на тргнувања на три автобуси.

	Тргнувања		
Скопје	13:45	14:54	16:01
Тетово	14:08	15:17	16:24
Гостивар	14:22	15:31	16:38
Маврово	14:58	16:07	17:14
Кичево	15:20	16:29	17:36
Охрид	16:08	17:17	18:24

а) Во колку часот автобусот што тргнува во 14:54 од Скопје ќе биде во Кичево?

б) Претвори го решението под **а)** во 12-часовен формат.

в) Емилија ја завршила својата работа во Гостивар во 3:50 попладне.

Колку време треба да чека за следниот автобус до Охрид?

11. Цедениот сок од портокал се продава во три различни пакувања.

Шише од 600 ml чини 69 денари

Шише од 1 l чини 99 денари

Шише од 2 l чини 189 денари

а) Пресметај ја цената на еден литар за секое пакување.

б) Кое од пакувањата има најповолна цена?

12. Следната табела ги прикажува должините на времињата на летовите и растојанијата помеѓу град А, град Б и град В.

Растојанието помеѓу град Б и град В недостига во табелата.

	Време на летот	Растојание (km)
Од град А до град Б	13 часа 30 минути	10557
Од град Б до град В	11 часа 24 минути	

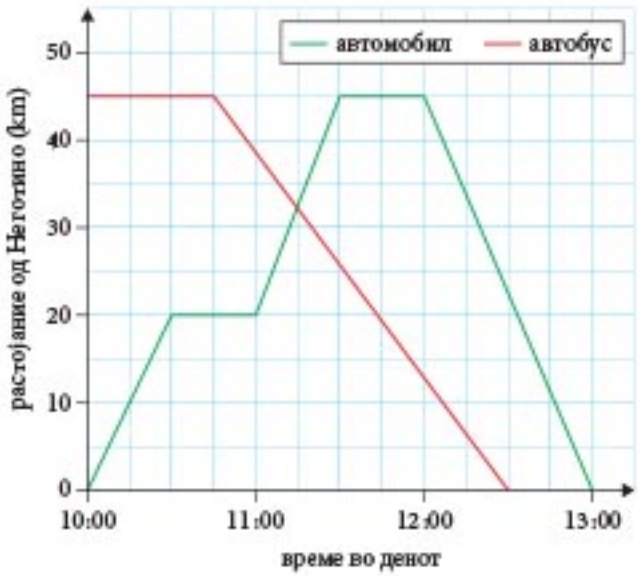
а) Пресметај ја средната брзина на авионот помеѓу градот А и градот Б.

б) Средната брзина помеѓу градот Б и градот В е 765 km/h.

Пресметај го растојанието помеѓу градот Б и градот В.

13. Зелената боја на графикот го прикажува патувањето со автомобил помеѓу Неготино и Струмица.

Двата града се оддалечени 45 километри.



Автомобилот тргнува од Неготино во 10:00.

а) Во колку часот ќе пристигне во Струмица?

б) Колку време автомобилот не се движел во Струмица?

Црвената линија го прикажува движењето на автобусот од Струмица до Неготино.

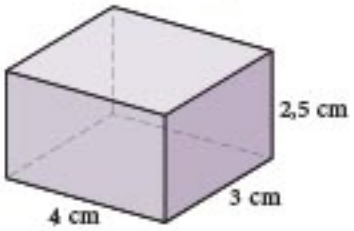
Автобусот тргнал од Струмица во 10:45.

в) Пресметај ја средната брзина на автобусот.

г) Запиши го времето кога ќе се разминат автобусот и автомобилот.

14. Претвори 1,1 час во часови и минути.

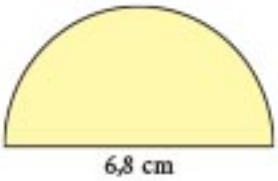
15. Дадениот квадар има димензии 4 cm, 3 cm и 2,5 cm.



а) Пресметај го волуменот на квадарот.

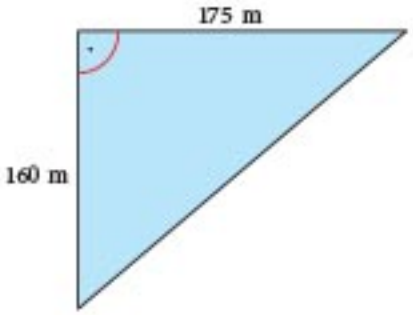
б) Пресметај ја плоштината на квадарот.

16. Полукругот има дијаметар 6,8 cm.



Пресметај ја плоштината на полукругот. Решението заокружи го на 3 значајни цифри.

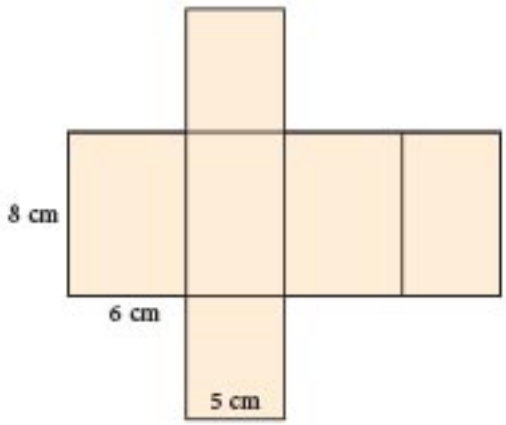
17. На цртежот е прикажан план на една нива.



а) Пресметај ја плоштината на нивата во квадратни метри.

б) Претвори го решението во хектари.

18. На цртежот е претставена мрежата на една 3Д-форма.



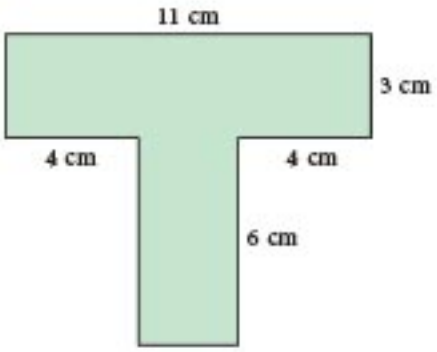
а) Пресметај ја плоштината на 3Д-формата.

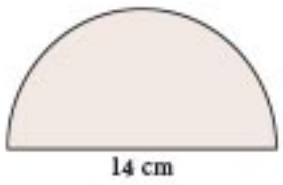
б) Пресметај го волуменот на 3Д-формата.

19. Колку mm^3 има во 1 cm^3?

20. Пресметај која од дадените 2Д-форми има поголем периметар.

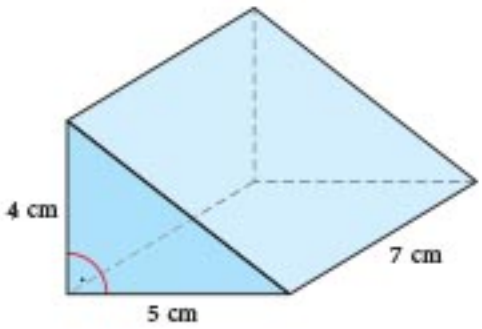
Прикажи ги сите чекори на пресметувањето.



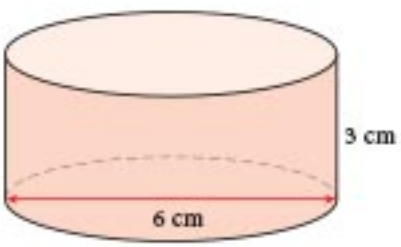


21. Колку cm^2 има во 1 m^2?

22. Пресметај го волуменот на призмата според податоците на цртежот.



23. На цртежот е претставен цилиндар со дијаметар 6 cm и висина 3 cm.



а) Пресметај ја плоштината на цилиндарот.

б) Пресметај го волуменот на цилиндарот.

Работа со податоци и решавање проблеми

1. Андреа фрлала коцка триесет пати.

Ги запишала резултатите од фрлањата.

3 5 4 3 3 6 4 3 1 4

3 1 5 6 4 1 2 4 3 2

6 5 2 6 4 6 4 5 3 3

а) Препиши ја и дополни ја колоната за фреквенција во нејзината табела.

Број	Фреквенција
1	
2	
3	
4	
5	
6	
	Вкупно 30

б) Одреди:

i Мода

ii Медијана

iii Просек

2. Дарко има четири карти. На секоја карта е напишан еден број.



а) Ако модата на броевите е 8, а нивната медијана е 6, кои се двата броја што недостигаат?

б) Ако рангот на броевите е 5, а нивниот просек е 5, кои се двата броја што недостигаат?

3. Дадени се висините, во сантиметри, на група луѓе.

162 183 175 190 176 169 181 177 171

Пресметај:

а) медијана на висините.

б) просек на висините.

4. Јован напишал 132 збора преку тастатура за 4 минути. Марко напишал 224 збора за 7 минути.

Кој пишувал побрзо?

5. Бројот на минути на доцнење на автобусите што пристигнуваат на автобуската станица се прикажани во следната табела.

Број на минути доцнење, m	Фреквенција	Средна вредност на класа
$0 < m \leq 10$	16	
$10 < m \leq 20$	10	
$20 < m \leq 30$	11	
$30 < m \leq 40$	8	
$40 < m \leq 50$	5	

а) Препиши ја табелата и дополни ја колоната за средната вредност на класа. Користи ги средните вредности на класи за да го процениш просекот на броевите на минутите на доцнење на автобусите.

б) Која класа ја содржи медијаната на броевите на минути на доцнење на автобусите?

6. 30 ученици решаваат тест по математика.

На тестот можат да се добијат најмногу 50 поени.

Дамјан ја направил следната табела за да ги прикаже поените.

Поени	Фреквенција
0-20	3
20-25	12
25-40	14
40-50	1
Вкупно	30

Најди две неправилности за табелата.

7. Весна спроведува истражување за да открие колку време учениците поминуваат во слушање радио.

Таа составила прашалник.

Ова е едно од нејзините прашања:

Колку часови поминувате во слушање музика на радио секоја недела?

Ве молам обележете

- ❑ 1 до 5
- ❑ 5 до 10
- ❑ 10 до 20
- ❑ Повеќе од 20

Најди две неправилности на прашањето на Весна.

8. Дадени се висините, заокружени на најблискиот сантиметар, на група тринаесетгодишни девојчиња.

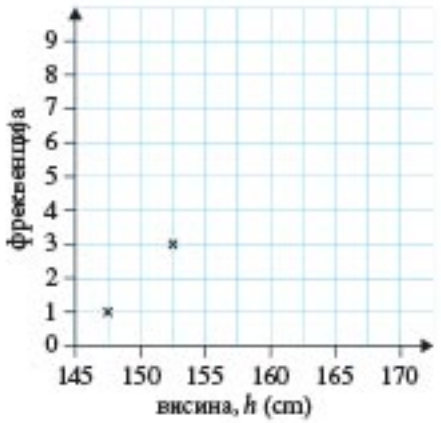
154 162 148 158 163 168 155 160

152 164 162 166 163 167 170 161

а) Прецртај ја и дополни ја табелата на фреквенција за висините на девојчињата.

Висина, h (cm)	Цртички	Фреквенција
$145 < h \leq 150$		
$150 < h \leq 155$		
$155 < h \leq 160$		
$160 < h \leq 165$		
$165 < h \leq 170$		

б) Прецртај го и дополни го полигонот на фреквенција за висините на девојчињата.



9. Еден научник тестира ново ѓубриво. Тој одгледува неколку растенија во две парцели, А и Б.

На парцелата А се користи новото ѓубриво. На парцелата Б не се користи новото ѓубриво.

Ги измерил висините на растенијата по еден месец одгледување. Медијаната за парцелата А е 76,5 cm, а рангот е 46.

Неговите резултати се прикажани на последователните стебло-лист дијаграм.

Парцела А								Парцела Б								
							4	0	1	1	7					
		9	7	6	4	4	1	5	1	2	2	3	3	3	4	6	8
			5	5	5	3	2	6	0	0	3	4	5	5	6	7	9
9	7	7	6	6	4	2	1	7	0	1	2	2	3	7	8		
	9	8	5	3	2	2	0	8	0	1	1	4	6				
		7	7	4	1	1	0	9									

Клуч: 1|7|0 значи висина на растенија на парцела А е 71 cm и висина на растенија на парцела В е 70 cm.

а) Најди ја медијаната на висините на растенијата на парцелата Б.

б) Најди го рангот на висините на растенијата на парцелата Б.

в) Спореди ги растенијата одгледани во парцелите А и Б.
Направи две споредби.

10. Во една кутија има само црвени, зелени, жолти и сини топчиња.
Веројатноста да се избере секоја од боите на случаен начин е дадена во табелата.

Боја	црвена	зелена	жолта	сина
Веројатност	0,2	0,1	0,4	

Колкава е веројатноста да се избере сино топче?

11. Дадена е фер вртелешка во форма на правилен шестаголник.
Веројатноста да се добие парен број е двапати поголема од веројатноста да се добие непарен број.



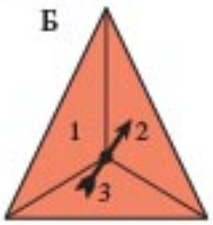
Прецртај го цртежот и запиши цел број во секој дел на вртелешката за да биде точно даденото тврдење.

12. На цртежите се претставени две фер вртелешки.

А



Б



а) Дополни ја табелата на исходи за да ги покажеш сите можни исходи на двете вртелешки.

		вртелешка Б		
		1	**2**	**3**
вртелешка А	**1**	1, 1	1, 2	1, 3
	3	3, 1		
	5		5, 2	
	7		7, 2	

б) Колкава е веројатноста да се добие непарен збир на броевите на двете вртелешки?

13. Иван користи две фер вртелешки во една игра.

Иван го запишувал збирот на двата броја на кои застанале вртелешките.

а) Дополни ја табелата и прикажи ги сите можни исходи.

		вртелешка 2				
		1	**2**	**3**	**4**	**5**
вртелешка 1	**1**	2	3	4	5	6
	2		4	5	6	7
	3			6	7	8
	4				8	9
	5					10

б) Одреди ја веројатноста дека Иван добил:

i збир 2 **ii** збир 11

в) Одреди ја веројатноста дека Иван добил збир поголем од 6.

Запиши го решението како нескратлива дропка.

Речник

А

азимут Агол измерен од север во насока на движење на стрелките на часовникот, што се користи за одредување насока.

Б

брзина Пат изминат во единица време.

бројтел Името на вредноста над дробната црта во дропката.

В

впишување Конструкција на 2Д-форма со темиња што лежат на страните на друга 2Д-форма.

Г

геометриско место на точки Множество точки што исполнуваат одредено правило.

грам Мерна единица за маса.

график на изминат пат График што го прикажува патот изминат во одреден временски период.

Д

дводимензионален 2Д-форма што има само должина и ширина, но не и висина.

двоен столбест дијаграм Столбест дијаграм на кој се прикажани вредности на две групи податоци.

децимално место (д.м.) Цифра во децималниот број по децималната запирка. На пример, 1 децимално место (д. м.) значи една цифра по децималната запирка.

дијагонала Отсечка во многуаголник што поврзува две негови несоседни темиња.

дијаграм со точки Дијаграм со кој се прикажани вредностите на две групи податоци како точки.

дијаметар Тетива што минува низ центарот на кружницата.

добивка Кога производот се продава по повисока цена од неговите почетни трошоци, тогаш разликата се нарекува добивка. (продажба – вкупни трошоци = добивка)

должина на кружница (или круг) Периметар на кружница.

Е

единичен размер Размер во вид $1 : n$ или $n : 1$.

еквивалентни дропки Дропки што имаат еднакви вредности.

еквивалентни размери Размери што покажуваат дека исти релативни величини се еквивалентни.

еквивалентни пресметки Пресметки што даваат ист резултат. На пример, $13 \cdot 0{,}03$ е еквивалентна пресметка со $13 \cdot 3 : 100$.

експериментална веројатност

$$= \frac{\text{број на успешни исходи}}{\text{вкупен број обиди}}$$

експеримент Низа од обиди.

З

загуба Кога производот се продава по пониска цена од неговите почетни трошоци, тогаш разликата се нарекува загуба.

замена Постапка со која на местото на буквите од израз или формула запишуваме дадени вредности.

зголемување Геометриска трансформација со која се менува големината на една 2Д-форма според даден коефициент на сличност. Добиена е слична 2Д-форма поголема од дадената.

значајни цифри Цифри на број. Првата ненултата цифра во бројот е првата значајна цифра и сите цифри по неа се значајни цифри.

И

изометриска хартија Хартија со триаголна низа на точки подредени во редици што меѓу себе зафаќаат агол од 120°.

израз Група членови што не го вклучуваат знакот за равенство.

именител Името на вредноста под дробната црта во дропка.

интервју Разговор меѓу две лица во кој едното лице му поставува прашање на другото.

истражување Метод на собирање податоци со поставување прашања или со вршење набљудувања.

исходи што заемно се исклучуваат Исходи што не можат да се случат во исто време, туку само еден од нив.

империјални мерни единици Стар систем од мерни единици.

К

кило Префикс за 1000.

коефициент на правец Мерка за косината на правата.

коефициент на сличност Количник од должините на страните на оригиналот и на зголемената слика.

комбинирана трансформација Повеќе од една трансформација.

компас Инструмент за одредување насоки, најчесто преку порамнување со север.

конвексен многуаголник Многуаголник чии внатрешни агли се помали од 180^0.

корелација Врска помеѓу две групи податоци.

Л

линеарна низа Низа во која разликите меѓу кои било соседни членови се еднакви.

линеарна функција Функција во која непознатата има степенов показател 1. График на линеарна функција е права.

литар Мерна единица за волумен на течност.

М

метар Мерна единица за должина.

метрички систем Систем од мерки што се заснова на декадниот броен систем.

мешан број Број составен од цел дел и дропка.

мили Префикс за $\frac{1}{1000}$ од мерна единица.

многуаголник Геометриска 2Д-форма со прави страни.

Н

n-ти член Општ член на низа.

набљудување Процес, односно постапка со која се собираат примарни податоци што се запишуваат кога ќе се забележат (видат), на пример бројот на автомобили што минуваат на одредено место.

надворешен агол Агол што се формира во надворешноста на многуаголник, кога ќе се продолжи една од неговите страни.

најпроста форма Запис на дропка или израз што не може повеќе да се упрости.

напречен пресек 2Д-формата што се добива ако 3Д-формата се пресече со рамнина во произволна точка.

негативна корелација Кога едната величина се зголемува, другата се намалува.

неконвексен многуаголник Многуаголник што има барем еден внатрешен агол поголем од 180^0.

неправилна дропка Дропка во која броителот е поголем од именителот.

неравенство Запис од два бројни изрази поврзани со еден од знаците $<, >, \geq, \leq$.

неравенка Неравенка е неравенство со променлива, како на пример, $x > 5$ или $y \leq -2$.

низа Група од броеви или шеми поврзани со некое правило.

нормала на права Права која со друга права зафаќа прав агол

нулта корелација Точките на дијаграмот не прикажуваат никаков тренд.

О

обид Еднократен експеримент, на пример фрлање коцка за играње.

обиди и грешки Начин на одредување приближни решенија на равенки, при што се прави процена на решението и потоа се прави обид да се подобри проценатa.

оригинал Почетната 2Д-форма пред да се почне со геометриската трансформација.

ослободување од загради Постапка на множење на сите членови во заградата со членот надвор од заградата на еден израз.

оска симетрија Симетрија во однос на права.

основа на степен Бројот што се степенува.

П

пи (π) Количник на должина на кружница и нејзиниот дијаметар. Приближно е еднаков на 3,141592654.

повеќекратен столбест дијаграм Столбест дијаграм што прикажува повеќе од една група податоци.

план Поглед на 3Д-форма одозгора.

позитивна корелација Кога едната величина се зголемува, тогаш се зголемува и другата величина.

полн квадрат Број што се добива со множење на цел број самиот со себе. Втор степен на бројот.

полигон на фреквенција Вид дијаграм на фреквенција што се користи за групирани податоци. Точките се цртаат за средните вредности на класи.

популација Целата група што е предмет на истражување.

последователен стебло-лист дијаграм Дијаграм што се користи за организирање на две групи податоци, подредени по големина.

права пропорција Две величини y и x се правопропорционални, ако $y = kx$, односно нивниот количник е константен.

правилна тесалација Формирање тесалација (мозаик) од еден вид правилен многуаголник.

правилен многуаголник Многуаголник со еднакви страни и еднакви агли.

правило за n-ти член на низа Правило што поврзува член на низата со неговиот реден број во низата.

правило за одредување следен член на низата Правило што поврзува два соседни члена на низата.

прашалник Група на запишани прашања.

предна проекција Поглед на 3Д-формата од предната страна.

призма 3Д-форма со иста 2Д-форма на напречен пресек.

примарни податоци Податоци што самите ги собираме.

примерок Делот од популацијата што го прашуваме, кога не сакаме да ја прашаме целата популација.

проекција Поглед на 3Д-форма. Постојат проекција одозгора и странични проекции.

променлива Величина што може да прима различни вредности. Најчесто е обележена со буква.

проста камата Камата што се исплатува еднократно на крајот на периодот на орочувањето.

процентуално намалување Процент за кој се намалила некоја вредност.

процена на просек Се одредува со користење на средните вредности во класите во група податоци. Тоа е оцена кога не се познати вистинските вредности.

Р

равенка Математичко тврдење според кое два израза со променлива се еднакви.

разложување на множители Постапка со која во еден израз се извлекува пред заграда НЗД за сите негови членови. Обратно од постапката на ослободување од загради.

размер Релативна големина на две или повеќе величини. Се запишува како количник.

рамнина на симетрија Рамнина или рамна површина што се однесува како огледало и која ја дели 3Д-формата на два складни дела. Секој од двата дела е огледална слика на другиот.

релативна фреквенција

$$= \frac{\text{број на успешни исходи}}{\text{вкупен број обиди.}}$$

С

санти Префикс за $\frac{1}{100}$ од мерна единица.

секундарни податоци Податоци што ги собирал некој друг.

систем равенки Неколку равенки со две или повеќе променливи, за кои постојат вредности што истовремено се решенија на сите равенки од системот.

симетрија Пресликување во однос на нешто (точка, права, рамнина или слично) при што една форма се пресликува во складна форма. Притоа формата и нејзината слика се огледални слики една на друга.

складен Складните 2Д-форми имаат исти должини и исти агли.

скратување Постапка со која броителот и именителот се делат со ист број. Друг збор за упростување.

слика Крајната 2Д-форма по геометриската трансформација.

сличност Две 2Д-форми се слични ако имаат еднакви агли и пропорционални страни.

сложена мерка Мерка, како брзината, што се пресметува од две други мерки.

соседна страна Страната во триаголникот што го формира (допира) аголот во правоаголен триаголник.

спротивна страна Страната што се наоѓа спроти аголот во правоаголен триаголник.

средна брзина Брзина пресметана во одреден временски период.

стебло-лист дијаграм Дијаграм на фреквенција што ги организира податоците по големина.

степен Запис за скратено множење на ист број сам со себе.

степен на точност Број на децимални места или на значајни цифри на бројот.

степенов показател Бројот во степенот што покажува колку пати основата се множи сама со себе: на пример, во 3^5, степенов показател е бројот 5.

странична проекција Страничен поглед на 3Д-форма.

Т

табела на исходи Табела што ги прикажува сите можни исходи во еден експеримент.

теме Точка каде што се допираат две страни на многуаголникот.

теорема Математичко тврдење чија точност може да се докаже.

тесалација Поплочување рамна површина со шема од 2Д-форми без преклопувања и без празнини.

трансформација Движење или промена на една 2Д-форма во друга.

тридимензионален Предмет што има должина, ширина и висина.

У

упростување дропка Скратување дропка.

упростување израз Постапка во која се собираат или одземаат слични членови во изразот.

Ф

формирање мозаик Формирање шема од 2Д-форми што покриваат рамна површина без преклопувања и без празнини.

формула Правило што поврзува две или повеќе променливи.

Х

хектар Мерна единица за плоштина, еднаква на 10000 квадратни метри.

хипотенуза Најдолгата страна на правоаголен триаголник.